



**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'AQUILA**  
**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, EDILE-ARCHITETTURA E AMBIENTALE**

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Civile, Edile-Architettura e Ambientale

Curriculum Ingegneria Civile e Ambientale

XXXIV ciclo

Titolo della tesi

**MODELLI E ANALISI DI SISTEMI ACCOPPIATI PER IL MIGLIORAMENTO DINAMICO E  
SISMICO DI STRUTTURE INTELAIATE**

SSD ICAR/08

Dottorando

Stefano Pagliaro

Coordinatore del corso  
Prof. Marcello Di Risio

Tutor  
Prof. Angelo Di Egidio

a.a. 2020/2021



UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELL'AQUILA FACOLTA'  
DI INGEGNERIA

DICEAA - Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile-Architettura e Ambientale

Dottorato di ricerca in Ingegneria Civile, Edile-Architettura e  
Ambientale — XXXIV Ciclo Settore scientifico-disciplinare  
ICAR/08

# MODELLI E ANALISI DI SISTEMI ACCOPPIATI PER IL MIGLIORAMENTO DINAMICO E SISMICO DI STRUTTURE INTELAIATE

Coordinatore del Dottorato  
Prof. Marcello Di Risio

Tutor  
Prof. Angelo Di Egidio

Dottorando  
Ing. Stefano Pagliaro



# Indice

<b>1</b>	<b>INTRODUZIONE</b>	<b>11</b>
1.1	Premessa . . . . .	11
1.2	Tuned Mass Damper (TMD) . . . . .	13
1.2.1	TMD - Il modello classico . . . . .	13
1.2.2	TMD - Applicazione a sistemi smorzati . . . . .	15
1.2.3	TMD - Influenza del rapporto di massa . . . . .	18
1.3	Isolamento alla base (BI) . . . . .	20
1.3.1	BI - Teoria lineare . . . . .	21
1.4	Rocking Walls . . . . .	23
1.4.1	Il modello classico di Housner . . . . .	25
1.5	Inerters . . . . .	27
1.5.1	Gli inerter nella protezione sismica di strutture . . . . .	28
1.5.2	L'utilizzo degli inerter per proteggere i blocchi rigidi dal ribaltamento . . . . .	31
<b>2</b>	<b>DISCONTINUITÀ ED ISOLAMENTO IN PIANI INTERMEDI</b>	<b>37</b>
2.1	Discontinuità ed isolamento a piano intermedio . . . . .	38
2.1.1	Esempi di applicazioni dell'isolamento intermedio in edifici esistenti . . . . .	38
2.2	Lo schema meccanico . . . . .	40
2.3	Il comportamento qualitativo della discontinuità . . . . .	41
2.3.1	Il modello meccanico e le equazioni del moto . . . . .	41
2.3.1.1	Il modello archetipo lineare . . . . .	41
2.3.1.2	Modelli principali e ausiliari a M-GDL . . . . .	43
2.3.2	Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno . . . . .	47
2.3.2.1	Eccitazione esterna . . . . .	49
2.3.3	Mappe di guadagno . . . . .	49
2.3.4	Interpretazione dei risultati . . . . .	52
2.3.5	Validità del modello archetipo . . . . .	55
2.4	Analisi sismica . . . . .	58
2.4.0.1	Eccitazione Sismica . . . . .	59
2.4.1	Il modello meccanico e le equazioni del moto . . . . .	61
2.4.1.1	Il modello archetipo . . . . .	61
2.4.1.2	Il telaio spaziale M-GDL . . . . .	63
2.4.2	Caratteristiche della struttura M-GDL e del modello archetipo 3-GDL . . . . .	67
2.4.3	Limiti del modello archetipo . . . . .	68
2.4.4	L'eccentricità del piano di isolamento . . . . .	73

2.4.5	Mappe spettro-compatibili . . . . .	74
2.4.5.1	Curve e mappe di guadagno . . . . .	76
2.5	Analisi non lineare . . . . .	80
2.5.1	Il modello meccanico . . . . .	80
2.5.2	Caratteristiche del telaio . . . . .	83
2.5.3	Coefficienti di guadagno . . . . .	84
2.5.4	Il comportamento qualitativo della discontinuità elasto-plastica . . . . .	84
2.5.4.1	Dipendenza dall'ampiezza . . . . .	85
2.5.4.2	La dipendenza da $\Psi$ . . . . .	86
2.5.5	Analisi sismica . . . . .	91
<b>3</b>	<b>MIGLIORAMENTO SISMICO DI EDIFICI INTELAIATI ATTRAVERSO L'ACCOPPIAMENTO CON UNA ROCKING WALL</b>	<b>97</b>
3.1	Accoppiamento tra strutture intelaiate e rocking wall . . . . .	98
3.2	Lo schema meccanico . . . . .	98
3.2.0.1	Uplift e condizioni di impatto . . . . .	105
3.2.0.2	Integrazione numerica . . . . .	106
3.3	Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno . . . . .	107
3.4	Il comportamento qualitativo del sistema accoppiato . . . . .	108
3.4.1	Il sistema meccanico e le equazioni del moto . . . . .	109
3.4.1.1	Uplift e condizioni di impatto . . . . .	111
3.4.1.2	Equazioni linearizzate . . . . .	112
3.4.1.3	Eccitazione esterna . . . . .	112
3.4.2	Il ruolo del dispositivo viscoelastico di accoppiamento (CD) . . . . .	113
3.4.2.1	Dispositivo puramente elastico . . . . .	113
3.4.2.2	Dispositivo di accoppiamento visco-elastico . . . . .	116
3.4.3	Il ruolo del dispositivo viscoelastico di collegamento tra blocco e terreno (ED) . . . . .	118
3.4.3.1	Dispositivo esterno puramente elastico . . . . .	118
3.4.3.2	Dispositivo esterno visco-elastico . . . . .	123
3.4.4	Considerazioni finali sull'analisi armonica . . . . .	124
3.5	Analisi sismica . . . . .	125
3.5.1	Il sistema meccanico e le equazioni del moto . . . . .	125
3.5.1.1	Condizioni di uplift e di impatto del blocco . . . . .	126
3.5.1.2	Eccitazione sismica . . . . .	127
3.5.2	Il ruolo del dispositivo di accoppiamento (CD) . . . . .	127
3.5.2.1	Dispositivo di accoppiamento puramente elastico . . . . .	129
3.5.3	Il ruolo della massa aggiunta e del livello di connessione . . . . .	132
3.5.4	Il ruolo dello smorzamento di accoppiamento . . . . .	132
3.5.5	Interpretazione dei risultati . . . . .	133
3.5.5.1	Equazioni linearizzate . . . . .	133
3.5.5.2	Relazione tra accoppiamento e caratteristiche spettrali del terremoto . . . . .	135
3.6	Utilizzo di inerter per il miglioramento delle prestazioni del sistema accoppiato . . . . .	140
3.6.1	Il sistema meccanico e le equazioni del moto . . . . .	140

## MODELLI E ANALISI DI SISTEMI ACCOPPIATI PER IL MIGLIORAMENTO DINAMICO E SISMICO DI STRUTTURE INTELAIATE

3.6.1.1	Eccitazione sismica . . . . .	143
3.6.2	Il ruolo degli inerter alla base del blocco ( $ID_B$ ) . . . . .	143
3.6.3	Il ruolo dell'inerter sul telaio ( $ID_S$ ) . . . . .	147
3.6.4	Interpretazione dei risultati ottenuti . . . . .	149
3.6.5	Analisi di spettro-Compatibilità . . . . .	151
3.6.5.1	Coefficienti di guadagno medi . . . . .	152
3.6.5.2	Mappe di guadagno medie . . . . .	152
3.7	Validazione sperimentale del modello . . . . .	155
3.7.1	Modello analitico . . . . .	155
3.7.2	Setup sperimentale . . . . .	157
3.7.3	Analisi armonica . . . . .	159
3.7.4	Analisi sismica . . . . .	162
3.8	Conclusioni . . . . .	165
<b>4</b>	<b>MIGLIORAMENTO DINAMICO DI STRUTTURE INTELAIATE ATTRAVERSO L'ACCOPPIAMENTO CON UN ESOSCHELETRO</b>	<b>171</b>
4.1	Lo schema meccanico . . . . .	172
4.2	Accoppiamento rigido tra telaio ed esoscheletro elasto-plastico	173
4.2.1	Il sistema meccanico e le equazioni del moto . . . . .	173
4.2.2	Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno	175
4.2.3	Il comportamento qualitativo del sistema accoppiato	177
4.2.3.1	Il ruolo della rigidità elastica e della forza di snervamento . . . . .	177
4.2.3.2	Il ruolo della rigidità post-elastica e della massa dell'esoscheletro . . . . .	182
4.2.3.3	Il ruolo dell'ampiezza dell'eccitazione armonica	184
4.2.4	Analisi sismica . . . . .	185
4.2.5	Conclusioni . . . . .	189
4.3	Accoppiamento deformabile tra telaio ed esoscheletro . . . . .	191
4.3.1	Il sistema meccanico e le equazioni del moto . . . . .	191
4.3.2	Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno	194
4.3.3	Analisi modale . . . . .	195
4.3.3.1	Il dispositivo di Kelvin-Voight . . . . .	196
4.3.3.2	Il dispositivo di Maxwell . . . . .	201
4.3.4	Analisi sismica . . . . .	204
4.3.5	Conclusioni . . . . .	213
<b>5</b>	<b>CONCLUSIONI</b>	<b>217</b>
	<b>APPENDICI</b>	<b>227</b>
<b>A</b>	<b>APPENDICE A</b>	<b>229</b>
A.1	Equivalenza dinamica tra modelli M-GDL e modelli archetipi	229
A.2	Registrazioni sismiche spettro-compatibili . . . . .	230
	<b>Bibliografia</b>	<b>232</b>



# MODELS AND ANALYSIS OF COUPLED SYSTEMS FOR THE DYNAMIC AND SEISMIC IMPROVEMENT OF FRAME STRUCTURES

---

## Abstract

This thesis studies the use of coupled system to improve the dynamical and seismic behaviour of frame structures. The thesis is divided in four chapters. The first chapter contains an introduction to the thesis. It shows the classical literature about the systems studied in the thesis, such as tuned mass damper, base isolation, rocking block and inerter devices. The second chapter investigates the discontinuity. The intermediate discontinuity, often called mid-story isolation, is a strategy for the protection of frame structures. In the thesis the name discontinuity is used since it represents a general variation of the stiffness in a structure. The part of the structure below the discontinuity is named substructure and the part above is name superstructure. The discontinuity couples the dynamical responses of substructure and superstructure. The chapter is divided in three parts. The first part studies the mechanical behaviour of the system and identifies the main parameters. The second part analyses the seismic response and compares the results obtained by archetype model with those obtained by a three-dimensional model. The last part introduces non linearities in the system by means of the Bouc-Wen model associated to the discontinuity layer. The results of the analysis are organised in gain maps. They show the performance indexes in the parameter plane and are a useful auxiliary tool for the preliminary design of the protection strategy. The maps highlight that discontinuity can improve the dynamical and seismic behaviour of frame structures. The third chapter investigates the coupling between two different types of structure, in particular between a frame and a rocking block. The block is smaller of the frame structure and the visco-elastic connection connects the block to the lower storey of the frame. This study is divided in three parts:

- Investigation of the mechanical behaviour of the system and identification of the design parameters;
- Evaluation of the design parameters of the coupling able to maximize the reduction of the displacement to both lower and upper storeys;

- Improvement of the system in order to increase the performances of the coupling and to reduce the visual impact of the protection strategy.

It is found that when only the coupling device is present, the block works as a tuned mass damper for the structure. In the second case, when both coupling and external devices are present, the block oscillates in phase with the bottom part of the structure. In both cases, it is possible to improve the behaviour of the frame structure in wide ranges of the parameters' values. The seismic analysis is carried out considering the system where only the coupling device is present. The results of parametric analysis are organized in maps plotted in the plane of the system's parameters. The maps provide the ratio between the maximum displacement (or the drift) of the coupled system and the maximum displacement (or the drift) of the frame structure not coupled with the block. When the ratio is lower than unity, then the block is able to improve the dynamics of the frame structure. It is found that wide gain regions where the coupling is beneficial for the structure exist in the parameter plane. However, the extension of such gain regions strongly depend on the linearized dynamic properties of the uncoupled and coupled mechanical systems and from the spectral characteristics of the earthquake. It is also showed that there is always the possibility to obtain advantages from the coupling, by suitably modifying the dynamics of the system. The last part investigates the use of inerters to improve the performances of the coupling. The first inerter device is placed on the substructure and connect the first storey of the frame to a rigid chevron frame. The second inerter device connect the block and the ground. The results show that inerters placed on substructure are always detrimental for the dynamical behaviour of the coupled system. Instead the inerters that connect the block to the ground increase the inertia of the block and improve the dynamical behaviour of the coupled system. The fourth chapter studies the coupling between a frame and an exoskeleton. Differently from the traditional approach, the exoskeleton studied in this chapter is connected only to the lower part of the structure, thus reducing both cost and aesthetic impact of the protection strategy. The study is organized in two parts:

- The frame structure is modeled by means of a 2-DOF archetype model and the first storey of the frame is rigidly connected to an elastoplastic exoskeletons.
- A visco elastic device connect the first storey of a frame structure and the exoskeleton. The coupling device consist of a Maxwell device or a Kelvin-Voight device. The use of inerter devices applied to the exoskeleton is considered.

The results of the parametric analysis are organized in gain maps that represent a tool to the comprehension of the mechanical behavior of the system and to the preliminary design of the protection strategy. It was found that both systems can improve the dynamical and seismic behaviour of frame structures.





# INTRODUZIONE

## 1.1 Premessa

Negli ultimi anni, molti terremoti hanno colpito l'Italia. In particolare, si ricordano San Giuliano di Puglia (2002), L'Aquila (2009), Medolla (2012), Accumoli (2016) che hanno causato vittime. Pertanto, la protezione sismica di strutture risulta essere uno degli argomenti più importanti dell'ingegneria civile. Sebbene la presente ricerca possa essere applicata sia a strutture nuove che esistenti, il maggiore interesse è rivolto al retrofit di strutture esistenti, che rappresentano la maggioranza del patrimonio edilizio italiano. Il termine retrofit è da intendersi come miglioramento del comportamento dinamico della struttura. Le tecniche proposte in questa tesi intervengono su parti limitate della struttura e sono intese a migliorare il comportamento globale dell'intera struttura, così minimizzando i costi e l'impatto visivo dell'intervento. Tutte le analisi sviluppate nella presente tesi sono rivolte ad edifici di modeste dimensioni (da 3 a 10 piani) tipici del patrimonio edilizio italiano.

Due tecniche molto conosciute per la protezione sismica di strutture sono l'isolamento alla base (BI) e il Tuned Mass Damper (TMD). Kelly e Den Hartog hanno scritto due lavori pionieristici su questi due sistemi utilizzando modelli archetipi caratterizzati da un numero ridotto di gradi di libertà [1, 17]. Da allora la ricerca ha fatto progressi offrendo sia varianti di questi sistemi con maggiori prestazioni sia nuovi modelli teorici che consentono di descriverli con maggiore accuratezza. Gli articoli [3, 4] propongono una versione più complessa del TMD, denominata Tuned Mass Damper Inerter (TMDI).

Di recente è stata proposta una nuova tecnica, conosciuta come "Mid-Story Isolation" o "Intermediate Discontinuity". In questa nuova tecnica il comportamento a BI e il comportamento a TMD coesistono. Infatti, la so-

vrastruttura si comporta da tuned mass damper per la sottostruttura e la sovrastruttura si comporta come fosse isolata alla base. In altre parole, la discontinuità intermedia può essere intesa come un TMD non convenzionale, dove la massa accordata è la massa della sovrastruttura [7, 8]. In [5, 6], il comportamento della discontinuità è studiato con l'ausilio di un modello archetipo a due gradi di libertà (2-DOF). Tale modello consente di descrivere in maniera accurata il caso in cui la discontinuità sia posizionata ai piani inferiori o superiori, ma risulta poco idoneo a descrivere casi in cui la discontinuità è posizionata ai livelli intermedi, dove il comportamento dinamico della sovrastruttura non è trascurabile. In questa tesi viene sviluppato un modello a tre gradi di libertà (3-DOF) che tenga conto della deformabilità di sia sovrastruttura che sottostruttura e della loro interazione quando separati da una discontinuità. Pertanto si può pensare alla discontinuità come una sorta di accoppiamento, dove la discontinuità "accoppia" la sovrastruttura e la sottostruttura al fine di migliorare il comportamento globale. In questo caso l'accoppiamento avviene tra due parti "interne" alla struttura. Negli ultimi anni molti autori hanno studiato l'accoppiamento di una struttura da proteggere con strutture esterne al fine di ridurre le vibrazioni causate da un moto esterno alla base. [9] studia il miglioramento sismico di edifici esistenti con installazione di smorzatori viscosi non lineari e alcune torri ausiliarie. Gli autori in [10] analizzano gli effetti del vento sul comportamento dinamico di due torri isolate alla base e accoppiate tra loro tramite un dispositivo viscoso non lineare.

Un esempio di accoppiamento tra due tipologie strutturali diverse può essere trovato in [11] dove viene studiato l'accoppiamento tra una struttura elastica e una rocking wall. Tuttavia in questo articolo la struttura elastica è modellata attraverso un unico grado di libertà. Ciò implica che la struttura deve essere connessa alla rocking wall ad ogni piano, e quindi le dimensioni della rocking wall devono essere comparabili con quelle della struttura. In questa tesi invece la struttura elastica viene modellata attraverso un sistema a due gradi di libertà, e quindi potendo considerare una rocking wall esterna di dimensioni ridotte. In particolare, si investigano il comportamento dinamico e i parametri di progetto ottimali che consentono di ridurre le vibrazioni sfruttando l'interazione dinamica tra il telaio da proteggere e la rocking wall.

Un'altra tipologia di accoppiamento è quella di un telaio con un esoscheletro esterno. Boake in [12] studia una tipologia particolare di esoscheletro, denominata struttura "diagrid". Invece [13, 14] hanno investigato la connessione ottimale tra strutture parallele, dove una di queste può

essere l'esoscheletro. Un altro studio [15] espone i vantaggi ottenuti utilizzando esoscheletri dissipativi. Questi studi si sono focalizzati su esoscheletri (o altre tipologie di strutture esterne) la cui altezza è comparabile a quella dell'edificio. Ciò comporta un elevato impatto estetico dell'intervento. In questa tesi invece si introduce un nuovo concetto di esoscheletro, legato al funzionamento dinamico globale del sistema. In questa maniera, l'esoscheletro copre solo una piccola porzione della struttura e sia l'impatto estetico che i costi e i tempi di realizzazione sono ridotti. Inoltre, se l'edificio presenta uno o più piani sotto terra, allora l'impatto estetico risulta trascurabile.

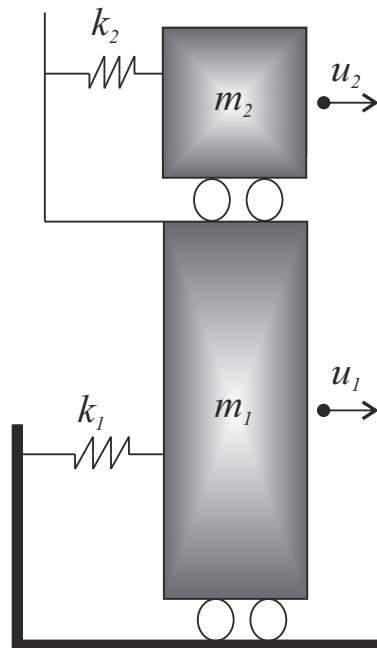
## **1.2 Tuned Mass Damper (TMD)**

Il TMD è stato teorizzato in [16, 17] all'inizio del XX secolo. La prima applicazione del TMD era in campo navale ed era volta a ridurre il beccheggio (rolling) delle navi e in seguito il suo utilizzo fu esteso alla riduzione degli effetti del vento, del traffico, moti ondosi per sistemi strutturali quali torri, grattacieli, ponti e piattaforme petrolifere. Solo di recente questa tecnica ha trovato applicazioni nella protezione sismica di strutture. Infatti, il TMD necessita di essere accordato alla frequenza dell'eccitazione esterna e i terremoti hanno un ampio raggio di variabilità delle frequenze nel loro spettro. Tuttavia di recente alcune pubblicazioni hanno mostrato che, se il rapporto di massa tra la massa della struttura usata per proteggere e quello della struttura da proteggere è abbastanza alto, allora il TMD tende meno a "perdere la sintonizzazione" ed è in grado di ridurre la risposta sismica della struttura. In altre parole, una massa elevata deve essere aggiunta al sistema in modo da raggiungere un elevato rapporto di massa del TMD [7].

### **1.2.1 TMD - Il modello classico**

Sebbene il primo utilizzo del TMD è dovuto a Frahm [16], la teoria sul sistema fu presentata da Den Hartog in [17], seguita da una procedura dettagliata per determinare i parametri ottimali da assegnare al TMD per ridurre le vibrazioni di un sistema ad un unico grado di libertà (S-DOF) [18]. Tale procedura era valutata per sistemi S-DOF non smorzati sottoposti a forzante armonica. Studi successivi [19, 20, 21] hanno esteso i risultati a sistemi smorzati S-DOF. Ioi e Ikeda in [22] hanno determinato fattori correttivi per i parametri del TMD in funzione del valore di smorzamento del sistema principale, assunto che tale valore sia comunque piccolo. Inoltre, Randall

[23] fornisce grafici per determinare i parametri ottimali del TMD su sistemi smorzati. È interessante dare uno sguardo alla procedura descritta da [18] su sistemi S-DOF non smorzati. Tale sistema è rappresentato in Fig. 1.1.



**Fig. 1.1:** Modello meccanico di sistema S-DOF e TMD presentato da Den Hartog (1956).

Le equazioni del sistema sono:

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + (k_1 + k_2)u_1(t) - k_2 u_2(t) = P_0 \sin(\Omega t) \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) = 0 \quad (1.2)$$

dove  $m_1$  e  $k_1$  sono la massa e la rigidità del sistema S-DOF,  $m_2$  e  $k_2$  sono massa e rigidità del TMD e  $\Omega$  è la frequenza della forzante. I punti indicano la derivazione rispetto alla variabile temporale  $t$ . Gli spostamenti del sistema S-DOF e del TMD sono rappresentati rispettivamente da  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ . Considerando il grado di derivazione delle funzioni  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  nella Eq. (1.1) e nella Eq. (1.2), la soluzione avrà la seguente forma:

$$u_1(t) = a_1 \sin(\Omega t) \quad u_2(t) = a_2 \sin(\Omega t) \quad (1.3)$$

Sostituendo le espressioni dell' Eq. (1.3) all'interno della Eq. (1.1) e Eq. (1.2) si ottiene:

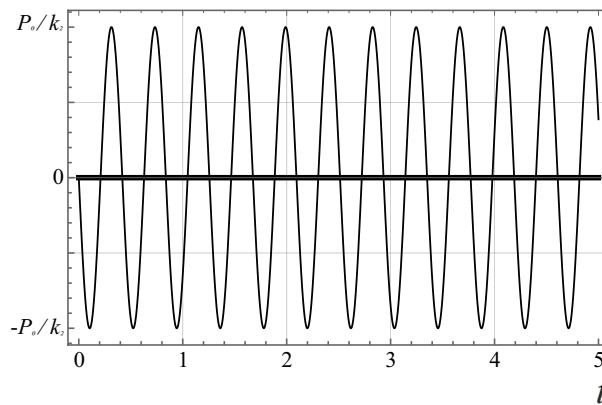
$$a_1 \left(1 + \frac{k_2}{k_1} - \frac{\Omega^2}{\omega_1^2}\right) - \frac{k_2}{k_1} a_2 = u_{st} \quad (1.4)$$

$$a_1 = a_2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_2^2}\right) \quad (1.5)$$

dove  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$  è la frequenza del sistema S-DOF,  $u_{st} = \frac{P_0}{k_1}$  è lo spostamento del sistema S-DOF in condizioni statiche e  $\omega_2 = \frac{k_2}{m_2}$  è la frequenza del TMD. È interessante notare che, se il rapporto  $\frac{\Omega^2}{\omega_2^2} = 1$ , allora lo spostamento del sistema S-DOF è zero. Pertanto, se il TMD viene accordato perfettamente alla frequenza della forzante, allora è possibile ridurre a zero le vibrazioni del sistema. Infatti, le ampiezze  $a_1$  e  $a_2$  risultano essere:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = -\frac{P_0}{k_2} \quad (1.6)$$

Gli spostamenti  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  sono rappresentati in Fig. 1.2.



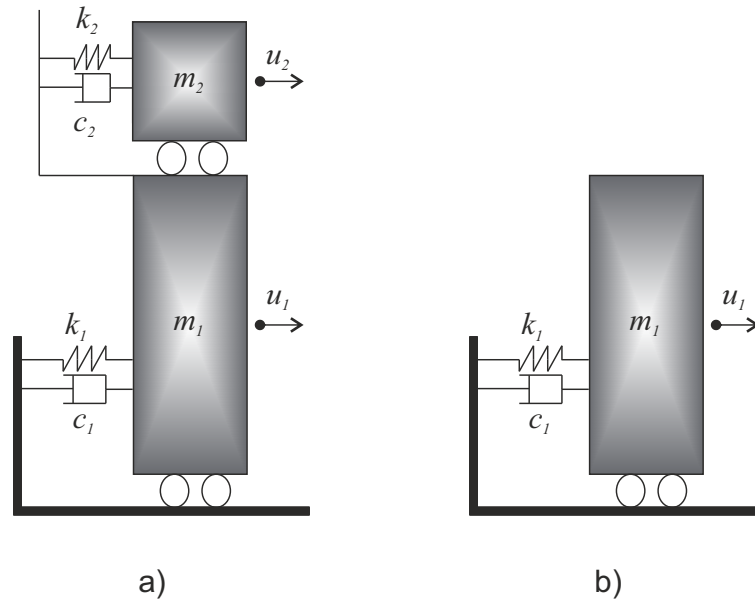
**Fig. 1.2:** Spostamenti  $u_1(t)$  ed  $u_2(t)$  del sistema SDOF con TMD.

Questo risultato è tuttavia difficile da applicare a casi reali per differenti motivi. Innanzitutto, se si vuole ridurre le vibrazioni causate da un moto sismico alla base, bisogna tenere conto che il sisma non è caratterizzato da una singola frequenza ma ha una potenza elevata in un range la cui larghezza dipende dallo spettro del terremoto stesso. Inoltre, l'ipotesi di smorzamento nullo non è verificata nella maggior parte dei casi. Infatti nelle strutture civili, nonostante il valore di smorzamento sia basso, non è nullo.

### 1.2.2 TMD - Applicazione a sistemi smorzati

I parametri ottimali di un TMD applicato a sistemi smorzati sono stati studiati in [19]. Si consideri il sistema di Fig. 1.3a.

L'Eq. (1.7) e Eq. (1.8) descrivono il comportamento di un TMD applicato ad un sistema S-DOF smorzato.



**Fig. 1.3:** Modello meccanico di a) sistema S-DOF equipaggiato con TMD e b) sistema di riferimento S-DOF.

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + (k_1 + k_2)u_1(t) - k_2 u_2(t) + (c_1 + c_2)\dot{u}_1(t) - c_2 \dot{u}_2(t) = P_0 e^{i\Omega t} \quad (1.7)$$

$$m_2 \ddot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) - c_2 \dot{u}_1(t) + c_2 \dot{u}_2(t) = 0 \quad (1.8)$$

La risposta stazionaria della massa principale è data da:

$$u_1 = P_0 \frac{(k_2 - m_2 \Omega^2) + i\Omega c_2}{[k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2 + i\Omega(c_1 + c_2)](k_2 - m_2 \Omega^2 + i\Omega c_2) - (k_2 + i\Omega c_2)^2} \quad (1.9)$$

Assegnando  $c_1 = 0$ , si ottiene la soluzione di Den Hartog [2, 18]:

$$u_1 = P_0 \frac{(k_2 - m_2 \Omega^2) + i\Omega c_2}{[(k_1 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2 m_2 \Omega^2] + i\Omega c_2 (k_1 - m_1 \Omega^2 - m_2 \Omega^2)} \quad (1.10)$$

Per una descrizione più generale delle caratteristiche del Tuned Mass Damper, si introducono i seguenti parametri adimensionali:

- **Rapporto di massa**  $\mu = m_2/m_1$ ;
- **Rapporto di sintonizzazione**  $f = \omega_2/\omega_1$
- **Rapporto di frequenza della forzante**  $\beta = \Omega/\omega_1$
- **Smorzamento del TMD**  $\gamma_2 = c_2/2m_2\omega_2$

**- Smorzamento del sistema principale**  $\gamma_1 = c_1/2m_1\omega_1$

Il fattore di amplificazione dinamica della risposta della massa principale è  $k_1u_1/P_0$ , dove  $u_1$  è l'ampiezza delle vibrazioni della massa principale  $m_1$ . Infatti,

$$R = \frac{k_1u_1}{P_0} = \frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2} \quad (1.11)$$

dove  $A = f^2 - \beta^2$ ,  $B = 2\gamma_2\beta f$ ,  $C = f^2(1 - \beta^2) - \mu f^2\beta^2 - \beta^2(1 - \beta^2) - 4\gamma_2\gamma_1f\beta^2$  e  $D = 2\gamma_2\beta f(1 - \beta^2 - \mu\beta^2) + 2\gamma_1\beta(f^2 - \beta^2)$ .

Den Hartog ha mostrato che se le curve di risposta del sistema principale sono messe su di un grafico per differenti valori dello smorzamento del TMD e lasciando costanti gli altri parametri, tutte le curve passano per due punti fissi. Nel caso in cui sia  $\gamma_1 = 0$ , ovvero nella soluzione ottenuta da Den Hartog, risulta che  $A$  e  $C$  non dipendono da  $\gamma_2$  mentre  $B$  e  $D$  sono proporzionali a  $\gamma_2$ , pertanto se  $A/C = B/D$  allora la risposta non dipende da  $\gamma_2$  e si avranno i due punti invarianti. La condizione di ottimizzazione prevede che le risposte in questi due punti siano uguali. Allora le frequenze nei punti fissi sono:

$$\beta_{1,2} = \left( \frac{1}{1 + \mu} \right) \left[ 1 \pm \left( \frac{\mu}{2 + \mu} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.12)$$

e il rapporto di sintonizzazione ottimale è:

$$f_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (1.13)$$

e la risposta nei due punti fissi è

$$R_{opt} = \left( 1 + \frac{2}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

Se la pendenza della curva di risposta è eguagliata a zero nei due punti fissi, allora  $\gamma_2$  è fornito da:

$$\gamma_2^2 = \frac{\mu \{ 3 \pm [\mu / (\mu + 2)]^{\frac{1}{2}} \}}{8(1 + \mu)} \quad (1.15)$$

Den Hartog [2] raccomanda di usare il valore medio definito da

$$\gamma_{2,opt}^2 = \frac{3\mu}{8(1 + \mu)} \quad (1.16)$$

Warburton [19, 20] tuttavia ha mostrato che, nel momento in cui lo smorzamento del sistema principale è diverso da zero, i due punti fissi non esistono. Randall [23] ha invece redatto dei grafici che mostrano curve di

progetto per  $R_{opt}$ ,  $f_{opt}$  e  $\gamma_{2,opt}$  all'interno di un range di parametri in cui il rapporto di massa varia tra l'1% e il 40% mentre il coefficiente di smorzamento  $\gamma_1$  varia tra lo 0 e il 50%. Da essi si possono dedurre alcuni comportamenti qualitativi. Infatti, all'aumentare del coefficiente di smorzamento del sistema principale il coefficiente di amplificazione dinamica  $R$  diminuisce, e tale effetto è tanto maggiore quanto più piccolo è  $\mu$ . Se si considera il caso estremo in cui  $\mu = 1$ , l'influenza del coefficiente di smorzamento del sistema principale sul coefficiente  $R$  diventa relativamente molto piccola. Anche il rapporto di sintonizzazione  $f$  dipende dal coefficiente di smorzamento del sistema principale. Quando tale coefficiente aumenta,  $f$  diminuisce e l'entità di tale variazione aumenta quando il rapporto di massa è elevato.

### 1.2.3 TMD - Influenza del rapporto di massa

Il TMD consiste in una massa aggiunta, generalmente piccola, la quale ha il compito di proteggere la massa principale. Il rapporto di massa  $\mu = m_2/m_1$  è pertanto un fattore essenziale nella progettazione del TMD. Come già evidenziato nell'introduzione, il TMD necessita di essere opportunamente sintonizzato su specifiche frequenze, al di fuori delle quali la sua capacità di ridurre le vibrazioni decresce rapidamente. Tuttavia, alcuni autori hanno evidenziato come sia possibile aumentare la banda di frequenza di funzionamento del TMD utilizzando rapporti di massa elevati ([7, 24]). In [7, 8] gli autori introducono il concetto di TMD non convenzionale, ovvero di una discontinuità realizzata in un piano intermedio del telaio. Infatti, poiché la discontinuità sfrutta una porzione della massa già presente nella struttura da proteggere, è possibile raggiungere elevati valori di  $\mu$  ([7, 8]). In particolare, [7] introduce una procedura di valutazione per la stima dei parametri di ottimo di un TMD e mette a confronto due sistemi con due diversi valori del rapporto di massa. Per mostrare i vantaggi del TMD ad elevato rapporto di massa, si considerino tre differenti sistemi:

1. Sistema S-DOF di riferimento, assenza di TMD ( $\mu = 0$ ) (Fig. 1.3b);
2. Sistema S-DOF equipaggiato con TMD a basso valore del rapporto di massa ( $\mu = 0.02$ , Fig. 1.3a);
3. Sistema S-DOF equipaggiato con TMD ad alto valore del rapporto di massa ( $\mu = 1.00$ , Fig. 1.3a).

Si consideri poi l' equazione dimensionale del sistema di riferimento (Fig. 1.3b):

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + c_1 \dot{u}_1(t) + k_1 u_1 = -m_1 A_0 \sin(\Omega t) \quad (1.17)$$

Si considerino le seguenti grandezze di tempo e spostamento in forma adimensionale:

$$\tau = \omega_1 t \quad (1.18)$$

$$\tilde{u}_1 = \frac{u_1}{\tilde{l}} \quad (1.19)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{u_2}{\tilde{l}} \quad (1.20)$$

dove  $\tau$  rappresenta il tempo adimensionalizzato e  $\tilde{l}$  rappresenta una lunghezza. Poiché il sistema è discreto, qualunque valore di  $\tilde{l}$  può essere utilizzato, e in particolare si assume  $\tilde{l} = 1$ . Inoltre, la sostituzione della variabile  $t$  con il tempo adimensionalizzato  $\tau$  rende possibile scrivere  $\ddot{u}_i(t) = \omega_1^2 \ddot{u}_i(\tau)$  e  $\dot{u}_i(t) = \omega_1 \dot{u}_i(\tau)$  con  $i = 1, 2$ . Dividendo entrambi i membri dell' eq. (1.17) per  $m_1$  e considerando le equazioni (1.18) e (1.19), e dividendo per  $\omega_1^2$  si ottiene:

$$\ddot{u}_1(\tau) + 2\xi_1 \dot{u}_1(\tau) + \tilde{u}(\tau) = a_0 \sin(\beta\tau) \quad (1.21)$$

Nel caso del sistema di Fig. 1.3a le equazioni sono:

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1(t) - c_2 \dot{u}_2(t) + (k_1 + k_2) u_1(t) - k_2 u_2(t) = -m_1 A_0 \sin(\Omega t) \quad (1.22)$$

$$m_2 \ddot{u}_2(t) - c_2 \dot{u}_1(t) + c_2 \dot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) = -m_2 A_0 \sin(\Omega t) \quad (1.23)$$

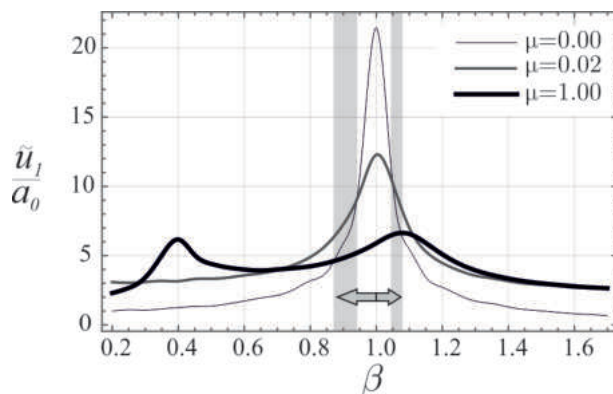
Dividendo per  $m_1$ , considerando le grandezze adimensionali in Eq. (1.18), Eq. (1.19) e Eq. (1.20) e dividendo per  $\omega_1^2$  si ottengono le equazioni adimensionali per il sistema con il TMD:

$$\ddot{u}_1(\tau) + (2\xi_1 + 2\xi_2 f \mu) \dot{u}_1(\tau) - 2\xi_2 f \mu \dot{u}_2(\tau) + (1 + f^2 \mu) \tilde{u}_1(\tau) - f^2 \mu \tilde{u}_2(\tau) = a_0 \sin(\beta\tau) \quad (1.24)$$

$$\mu \ddot{u}_2(\tau) - 2\xi_2 f \mu \dot{u}_1(\tau) + 2\xi_2 f \mu \dot{u}_2(\tau) - f^2 \mu \tilde{u}_1(\tau) + f^2 \mu \tilde{u}_2(\tau) = a_0 \sin(\beta\tau) \quad (1.25)$$

Nella Fig. 1.4 si può osservare il massimo valore del rapporto  $\tilde{u}_1/a_0$  in funzione del rapporto di frequenza della forzante  $\beta$  per tre diversi sistemi: la linea più sottile indica il sistema di riferimento ( $\mu = 0$ ), la linea intermedia indica

il sistema con TMD con valore ridotto del rapporto di massa ( $\mu = 2.0\%$ ) e la linea più spessa indica il sistema con TMD con valore elevato del rapporto di massa. ( $\mu = 100.0\%$ ). Le aree in grigio evidenziate in figura rappresentano i range di frequenza aggiuntivi in cui il TMD con  $\mu$  elevato può operare con efficacia rispetto al TMD con ridotto valore di  $\mu$ . Pertanto si può dedurre che un rapporto di massa elevata amplia il range di frequenze in cui il TMD può operare, così riducendo la tendenza del TMD a perdere la sintonizzazione ([7]).



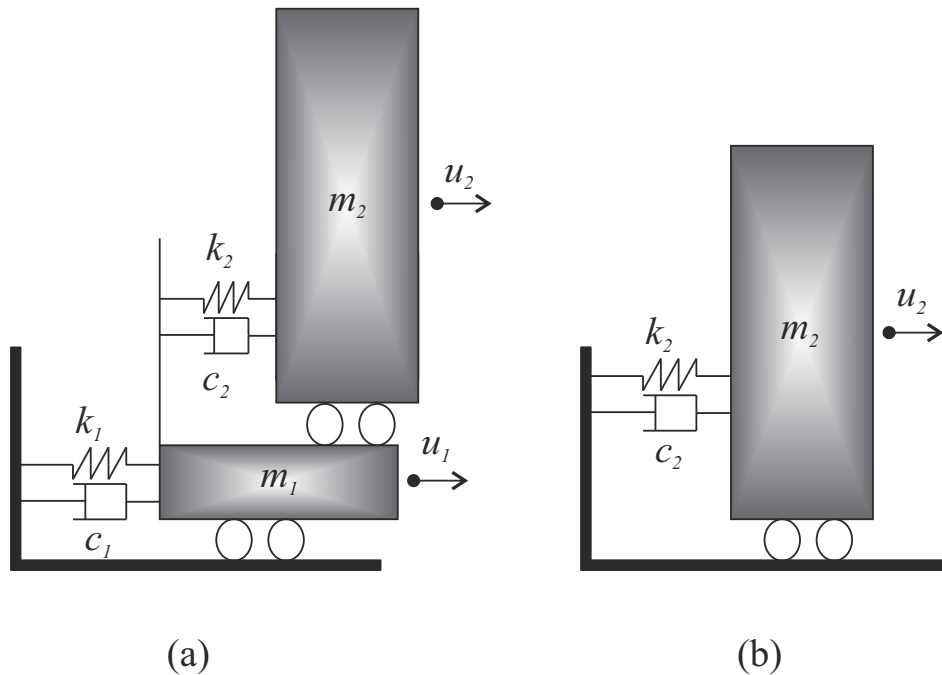
**Fig. 1.4:** Funzione di risposta per tre differenti sistemi: sistema in assenza di TMD (linea nera), sistema con TMD a basso rapporto di massa (linea grigia) e sistema con TMD ad elevato rapporto di massa (linea spessa).

### 1.3 Isolamento alla base (BI)

L'isolamento sismico è una tecnica molto efficace nel ridurre i danni che un terremoto può creare. Il concetto alla base ([25, 26]) è molto semplice: disaccoppiare la struttura dal moto orizzontale alla base interponendo, tra la struttura e la fondazione, elementi strutturali a bassa rigidezza orizzontale. In questo modo, il periodo principale della struttura si sposta verso zone dove il terremoto ha basse potenze spettrali. Il primo modo della struttura coinvolge fondamentalmente la deformazione degli isolatori. Lo scopo dell'isolamento non è quello di assorbire l'energia del terremoto, ma piuttosto di allontanare le frequenze caratteristiche della struttura da quelle del terremoto. Lo smorzamento non riveste un ruolo principale nell'effetto di "shift" delle frequenze, tuttavia può aiutare a mitigare gli spostamenti del piano di isolamento ed eventuali fenomeni di risonanza in prossimità della frequenza di isolamento.

### 1.3.1 BI - Teoria lineare

La teoria lineare classica dell'isolamento alla base è stata descritta da Kelly in [25]. Il modello utilizzato è un semplice sistema a due gradi di libertà. Le masse  $m_1$  e  $m_2$  rappresentano, rispettivamente, la massa del piano sopra l'isolamento e la massa della struttura. Inoltre  $k_1$  e  $c_1$  sono la rigidezza e lo smorzamento dell'isolamento mentre  $k_2$  e  $c_2$  rappresentano la rigidezza e lo smorzamento della struttura.



**Fig. 1.5:** Modello meccanico del (a) sistema con isolamento alla base (BI) e (b) del sistema senza isolamento alla base (RS).

Le equazioni del moto sono definite da:

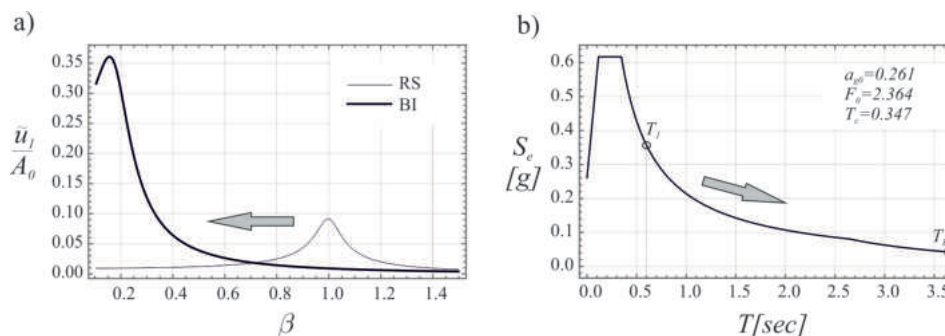
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}\ddot{u}_g(t) \quad (1.26)$$

dove  $\mathbf{M}$  è la matrice delle masse,  $\mathbf{C}$  è la matrice di smorzamento,  $\mathbf{K}$  è la matrice di rigidezza,  $\mathbf{r}$  il vettore di trascinato e  $\ddot{u}_g(t)$  è l'accelerazione del moto alla base. Le tre matrici sono riportate nell'eq. (1.27) mentre  $\mathbf{r} = (1 \ 1)^T$  è il vettore di trascinato.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

La Fig. 1.6a mostra la funzione di risposta di un sistema con (BI) e senza (RS) isolamento alla base mentre nella Fig. 1.6b è riportato uno spettro di

risposta definito dalla normativa italiana NTC18. In Fig. 1.6a si osserva che la frequenza fondamentale del sistema BI è caratterizzata da un rapporto  $\beta = \Omega/\omega$  molto più basso del sistema di riferimento non isolato (RS). Questo implica che il periodo fondamentale del sistema incrementa dopo l'introduzione del sistema di isolamento spostando i periodi in zone dello spettro di risposta (Fig. 1.6b) caratterizzate da una potenza inferiore.



**Fig. 1.6:** Funzione di risposta in frequenza per il sistema non isolato (RS) e isolato (BI). Si può notare come ad un decremento della frequenza caratteristica (a) corrisponda un valore del periodo sullo spettro di risposta a potenza inferiore (b).

Inoltre i sistemi isolati sono generalmente caratterizzati da un fattore di partecipazione relativo al primo modo elevato, difatti la risposta del sistema isolato dipende principalmente dal primo modo ovvero dal modo caratterizzato dallo spostamento della base isolata.

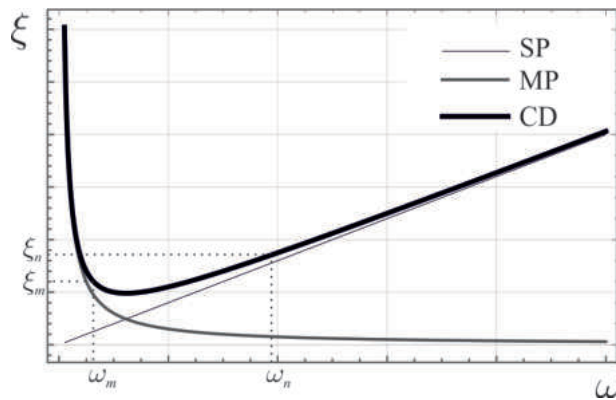
Come visto precedentemente, una diminuzione della rigidità degli isolatori, ovvero un incremento del periodo proprio dell'isolamento produce una riduzione delle sollecitazioni sulla struttura, ma a spese di un alto spostamento degli isolatori. Al fine di limitare lo spostamento degli isolatori, i dispositivi di isolamento sono spesso affiancati da smorzatori supplementari. L'incremento di smorzamento nel piano di isolamento può non essere sempre benefico per la struttura ed è descritto nel dettaglio in [27]. Nel caso di sistemi di isolamento a basso smorzamento, è possibile utilizzare la formulazione classica di Rayleigh che considera uno smorzamento combinato di una parte proporzionale alla massa e una parte proporzionale alla rigidità definito come:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (1.28)$$

dove  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  sono, rispettivamente, la matrice delle masse e delle rigidità mentre  $\alpha$  e  $\beta$  sono i coefficienti di Rayleigh definiti nel seguente modo:

$$\{\alpha; \beta\} = \left\{ \frac{2\omega_m\omega_n\zeta}{\omega_m + \omega_n}; \frac{2\zeta}{\omega_m + \omega_n} \right\} \quad (1.29)$$

in cui  $\omega_{m,n}$  sono frequenze proprie del sistema e  $\xi$  è lo smorzamento di Rayleigh. La Fig. 1.7 mostra la distribuzione dello smorzamento modale in funzione delle frequenze modali.



**Fig. 1.7:** Distribuzione degli smorzamenti modali in funzione delle frequenze modali. Smorzamento proporzionale alla rigidezza (SP), smorzamento proporzionale alla massa (MP) e smorzamento combinato (CD).

Nel caso in cui siano presenti smorzatori supplementari, lo smorzamento nel piano di isolamento risulta maggiore dello smorzamento della struttura e non è più possibile utilizzare la formulazione tradizionale. Pertanto è necessario costruire la matrice  $\mathbf{C}$  attraverso una procedura non proporzionale [28, 29, 30]. Ne risulta una matrice  $\mathbf{C}$  che, quando proiettata nella base modale, non è più diagonale, ma presenta termini fuori dalla diagonale principale. L'incremento di smorzamento sul piano di isolamento da una parte ne riduce lo spostamento, dall'altra incrementa il drift della sovrastruttura e delle accelerazioni di piano. Questo si verifica in quanto si ha un incremento della risposta dei modi superiori, generati dai termini di accoppiamento modale, che nel caso di isolatori a basso smorzamento possono essere trascurati mentre nel caso di isolatori ad alto smorzamento svolgono un ruolo considerevole.

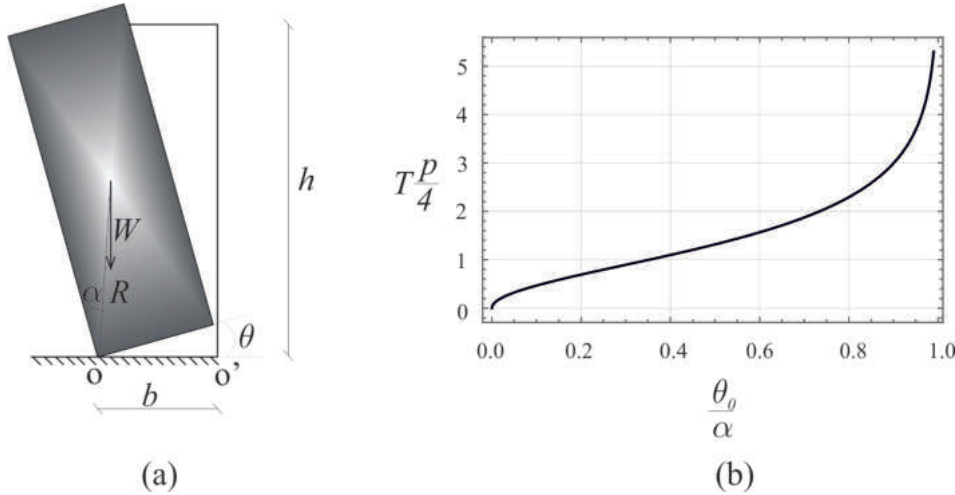
## 1.4 Rocking Walls

In letteratura con blocco rigido si intendono tutte quelle strutture che mostrano un comportamento chiamato "rocking". Il primo lavoro a descrivere questo particolare tipo di comportamento è dovuto ad Housner [31]. Il comportamento del blocco sotto forzante armonica è stato analizzato in [32, 33]. In particolare [32] utilizza equazioni lineari a tratti per approssimare il comportamento non lineare di blocchi molto snelli mentre [33] studia l'instabilità del blocco variando sia le dimensioni geometriche che le condizioni iniziali dovute ad imperfezioni. [34] indaga la risposta transitoria di

blocchi rigidi soggetti a impulsi cicloidali e individua due modi differenti di ribaltamento: nel primo modo il ribaltamento del blocco avviene dopo un impatto mentre nel secondo modo il ribaltamento avviene senza che vi siano stati impatti. Yim in [35] estende il lavoro di Housner, studiando il comportamento di blocchi rigidi sotto azioni sismiche, considerando sia l'azione orizzontale che quella verticale e valutando la correlazione tra le caratteristiche geometriche del blocco e il ribaltamento. Il problema di blocco rigido sottoposto ad eccitazione sismica, contenente impulsi significativi, come nel caso di terremoti in prossimità della faglia, è analizzato in [36]. Andreus in [37] studia gli effetti dello scorrimento del blocco sul piano di posa mentre Pompei in [38] espone gli errori che si possono verificare quando non si tiene conto del possibile scorrimento del blocco sulla superficie che si può verificare durante il sisma. Psycharis in [39] costruisce delle curve di fragilità per colonne in funzione della magnitudo e della distanza dalla faglia e misurando sia l'intensità della risposta che la deformazione residua della colonna. Un ulteriore sviluppo del modello è dato da [40], dove viene esposto il modello di blocco deformabile. In [41, 42] viene introdotto il modello tridimensionale di blocco rigido e i risultati di tale modello sono comparati con quelli ottenuti dal modello classico bidimensionale. In [43] viene introdotto il modello di blocco rigido su fondazione deformabile. Poiché la maggior parte degli studi si concentra sull'analisi del comportamento di un singolo blocco, [44] ha proposto una metodologia per l'equivalenza dinamica tra il blocco singolo e strutture più complesse che presentano vari meccanismi di rocking. Un aspetto molto importante nello studio dei blocchi rigidi consiste nel proporre metodologie e sistemi atti a prevenirne il ribaltamento. Tali sistemi possono essere divisi in due categorie, sistemi passivi e sistemi attivi. Tra i sistemi passivi una tipologia di intervento molto semplice ma anche efficace consiste nella applicazione di ancoraggi che vincolino il blocco al terreno [45]. Un'altra tipologia consiste nel posizionare il blocco sopra una base isolata ([46, 47, 48]). Differenti autori ([49, 50, 51, 52]) hanno invece utilizzato un "mass-damper dynamic adsorber" a forma di pendolo, dimostrando l'efficacia di tale sistema. In [53], il mass damper è modellato con un singolo grado di libertà ed è libero di spostarsi sulla testa del blocco. [54] investiga gli effetti di dispositivi dissipativi, sia isteretici che viscosi, sulle colonne soggette ad azione sismica. Esempi di sistemi di protezione attiva possono essere trovati in [55, 56], dove viene sviluppata una tecnica di controllo attiva basata su un approccio "Pole Placement" capace di incrementare l'ampiezza dell'eccitazione alla base capace di ribaltare il blocco.

### 1.4.1 Il modello classico di Housner

Le equazioni classiche del blocco rigido sono state determinate da Housner in [31]. Si consideri il blocco di Fig. 1.8a, dove il blocco può oscillare intorno al punto di pivot (O oppure O').



**Fig. 1.8:** (a) Modello classico di blocco rigido e (b) dipendenza del periodo di oscillazione dall'ampiezza di oscillazione.

Nel modello di Housner, si assume che il blocco non può scorrere. Il comportamento del blocco dipende dal peso  $W$ , dal momento di inerzia  $I_0$  intorno al punto  $O$  e dalla posizione del baricentro. Se il blocco ha altezza  $h$  e base  $b$ , allora la posizione del baricentro è  $R = \sqrt{b^2 + h^2}$ . La linea  $R$ , che indica la distanza dal baricentro al punto di pivot, individua un angolo  $\alpha$  con la verticale.  $\theta$  rappresenta l'angolo di rocking. Quando il blocco ruota di un angolo  $\theta$ , il peso del blocco genera un momento pari a  $WR\sin(\alpha - \theta)$  e pertanto l'equazione del moto è

$$I_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -WR\sin(\alpha - \theta) \quad (1.30)$$

Nel caso di blocchi alti e snelli che hanno un angolo  $\alpha < 20^\circ$ , il seno dell'angolo può essere approssimato con l'angolo stesso e quindi l'equazione (1.30) diventa:

$$I_0 d\ddot{\theta} - WR\theta = -WR\alpha \quad (1.31)$$

Questa equazione descrive le vibrazioni libere del blocco. Inoltre, Housner pone  $p^2 = WR/I_0$ , modificando la (1.31) in

$$d\ddot{\theta} - p^2\theta = -p^2\alpha \quad (1.32)$$

La (1.32) è un'equazione differenziale del secondo ordine. La soluzione, trovata imponendo le condizioni iniziali  $\theta(0) = \theta_0$  e  $\dot{\theta}(0) = 0$ , è la seguente:

$$\theta = \alpha - (\alpha - \theta_0) \text{Cosh}(pt) \quad (1.33)$$

Questa equazione descrive il comportamento del blocco mentre torna nella sua posizione verticale ruotando attorno al punto O. Dopodiché, il blocco inizierà a ruotare intorno al punto O'. Se l'energia persa durante l'impatto è trascurabile, allora il blocco ruota di angolo pari a  $\theta_0$ . In seguito, il blocco torna in posizione verticale per poi ruotare nuovamente intorno al punto O. In questo istante, un ciclo completo di rocking è terminato e il tempo necessario a compiere questo ciclo è detto periodo di vibrazione libera. Il tempo che il blocco impiega a passare da  $\theta = \theta_0$  a  $\theta = 0$  è pari a  $T/4$ , dove  $T$  è il periodo di vibrazione libera. Allora imponendo  $\theta = 0$  e  $t = T/4$  nell'equazione (1.33) si ottiene:

$$\text{Cosh}\left(\frac{pt}{4}\right) = \frac{1}{1 - \frac{\theta_0}{\alpha}} \quad (1.34)$$

ed esprimendo il periodo  $T$  in funzione di  $p$  e  $\theta_0/\alpha$  si trova la seguente relazione:

$$T = \frac{4}{p} \text{ArcCosh}\left(\frac{1}{1 - \frac{\theta_0}{\alpha}}\right) \quad (1.35)$$

La Fig. 1.8b rappresenta la dipendenza del periodo di vibrazione dall'ampiezza di oscillazione come descritta nell'Eq. (1.35). È interessante notare che nei blocchi rigidi e nelle strutture che si comportano come tali il periodo di vibrazione dipende dall'ampiezza di oscillazione. Se quest'ultima varia, allora varierà anche il periodo.

Nella realtà, dopo ogni impatto con la base vi è dissipazione di energia. L'energia dissipata aumenta ad ogni impatto e quindi ogni mezzo ciclo. Questo vuol dire che il periodo di ogni mezzo ciclo è più corto del mezzo ciclo che lo ha preceduto. La riduzione di energia cinetica dopo l'impatto è:

$$R = \frac{\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_2^2}{\frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}_1^2} = \frac{\dot{\theta}_2^2}{\dot{\theta}_1^2} \quad (1.36)$$

Eguagliando il momento della quantità di moto prima e dopo l'impatto, si ottiene:

$$I_0 \dot{\theta}_1 - 2mRb\dot{\theta}_1 \text{Sin}(\alpha) = I_0 \dot{\theta}_2 \quad (1.37)$$

e pertanto la riduzione di energia dovuta all'impatto è pari a

$$r = \left[1 - \frac{mR^2}{I_0}(1 - \cos 2\alpha)\right]^2 \quad (1.38)$$

Nel caso di blocchi snelli, la relazione può essere riscritta come:

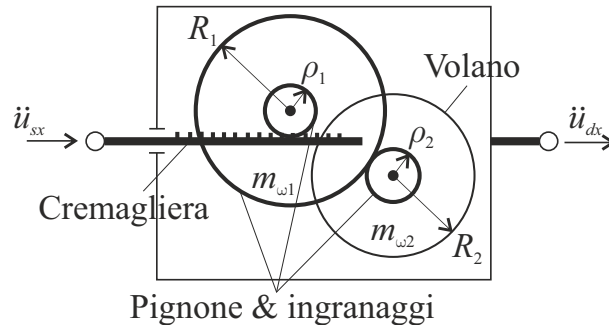
$$\sqrt{r} = 1 - \frac{2mR^2\alpha^2}{I_0} \quad (1.39)$$

Il periodo di vibrazione dopo l' $n$ -simo impatto è fornito dalla seguente relazione:

$$\frac{T}{2} = 2\sqrt{\frac{I_0}{WR}} \operatorname{ArcTanh} \sqrt{r^n \left[1 - \left(1 - \frac{\theta_0}{\alpha}\right)^2\right]} \quad (1.40)$$

## 1.5 Inerters

L'inerter (anche chiamato inertizzatore o j-damper) è un dispositivo meccanico a due terminali nel quale le forze applicate ai terminali sono uguali, opposte e proporzionali all'accelerazione relativa tra i nodi. Il primo a presentare questo dispositivo fu il professor Malcom C. Smith in [57]. Si consideri l'inerter come un sistema cremagliera-pignone-volano (Fig. 1.9)



**Fig. 1.9:** Sistema di inerzia rotazionale supplementare: cremagliera-pignone-volano

Il sistema consiste di due o più volani di raggio  $R_i$  e massa  $m_{\omega i}$ , liberi di ruotare e connessi ad una cremagliera attraverso un meccanismo pignone-ingranaggi. La forza resistente  $F_{ID}$  dell'inerter ([58, 59, 60]) è pari a:

$$F_{ID} = m_R(\ddot{u}_{dx} - \ddot{u}_{sx}) \quad (1.41)$$

dove  $m_R$  è l'inertanza o massa apparente del dispositivo inerter. Essa dipende dalle caratteristiche geometriche e meccaniche del sistema. Per l'inerter di Fig. 1.9 con due volani la massa apparente  $m_R$  è pari a:

$$m_R = \frac{1}{2}m_{\omega 1} \frac{R_1^2}{\rho_1^2} + \frac{1}{2}m_{\omega 2} \frac{R_1^2 R_2^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} \quad (1.42)$$

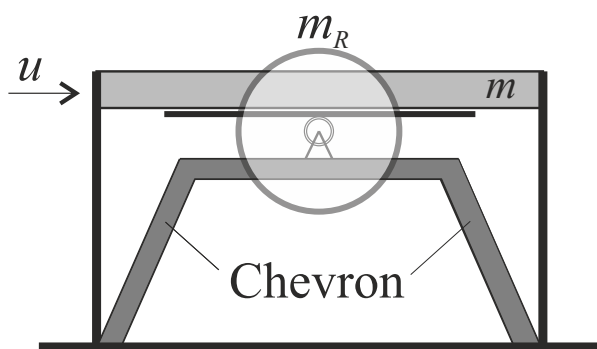
L'inertanza del dispositivo può essere incrementata aggiungendo altri volani. In genere, la massa virtuale  $m_R$  di un inerter con  $N$  volani è:

$$m_R = \frac{1}{2}m_{\omega 1} \frac{R_1^2}{\rho_1^2} + \frac{1}{2}m_{\omega 2} \frac{R_1^2 R_2^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} + \dots + \frac{1}{2}m_{\omega i} \frac{R_1^2 R_2^2 \dots R_i^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_i^2} + \dots + \frac{1}{2}m_{\omega N} \frac{R_1^2 R_2^2 \dots R_i^2 \dots R_N^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_i^2 \dots \rho_N^2} \quad (1.43)$$

Indipendentemente dalla massa totale dell'inerter, qualunque valore di inertanza può essere ottenuto con un numero sufficiente e una dimensione opportuna dei volani.

### 1.5.1 Gli inerter nella protezione sismica di strutture

Gli inerter hanno trovato molte applicazioni negli ultimi anni. Una di queste è stata proposta da Makris in [58]. In tale lavoro si studia la possibilità di ridurre le vibrazioni di una struttura attraverso l'aggiunta di inerzia rotazionale fornita dall'inerter. La struttura viene modellata attraverso un modello archetipo ad un'unica grado di libertà la cui massa e rigidezza sono, rispettivamente,  $m$  e  $k$ . Un telaio chevron rigido supporta il volano di raggio  $R_1$  e massa  $m_{W1}$ , il quale può ruotare intorno all'asse  $O$ . Poiché lo chevron è rigido, allora si ha solo lo spostamento del telaio  $u(t)$ . Un pignone di raggio  $\rho_1$  è agganciato ad una cremagliera che è connessa sulla parte inferiore della massa  $m$ . Lo schema di collegamento tra inerter, telaio e chevron è mostrato in Fig. 1.10.



**Fig. 1.10:** Schema di collegamento tra telaio, inerter e chevron.

Quando la massa  $m$  è soggetta ad uno spostamento positivo  $u(t)$  il volano ruota in senso orario di un angolo  $\phi_1(t)$ . Poiché non vi è scivolamento tra la cremagliera e il pignone risulta che

$$\phi_1(t) = \frac{u(t)}{\rho_1} \quad (1.44)$$

L'equazione di equilibrio della massa  $m$  quando soggetta ad un'accelerazione alla base  $\ddot{u}_g(t)$  è:

$$m[\ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)] = -ku(t) - F_1(t) \quad (1.45)$$

dove la forza  $F_1(t)$  deve soddisfare la condizione di equilibrio dei momenti intorno al punto O:

$$I_{W1}\ddot{\theta}_1(t) = F_1(t)\rho_1 \quad (1.46)$$

e  $I_{W1} = (1/2m_{W1}R_1^2)$  è il momento di inerzia del volano intorno ad O. Sostituendo l'Eq. (1.46) nell'Eq. (1.45) e considerando l'Eq. (1.44) si ottiene:

$$\left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_{W1}}{m} \frac{R_1^2}{\rho_1^2}\right) \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad (1.47)$$

dove  $\omega_0$  è la frequenza naturale del sistema 1-GDL pari a  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Dividendo entrambi i termini per il coefficiente di  $\ddot{u}(t)$  si ottiene:

$$\ddot{u}(t) + \frac{\omega_0^2}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_{W1}}{m} \frac{R_1^2}{\rho_1^2}\right)} u(t) = -\frac{\ddot{u}_g(t)}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_{W1}}{m} \frac{R_1^2}{\rho_1^2}\right)} \quad (1.48)$$

I termini al denominatore sono maggiori dell'unità, e pertanto svolgono due funzioni:

- a sinistra dell'equazione dividono la frequenza propria e pertanto si ha un incremento del periodo del sistema.
- a destra dell'equazione dividono il termine relativo all'eccitazione esterna, così riducendo il grado di eccitazione ricevuto dalla struttura.

Dall'Eq. (1.48), il denominatore può essere riscritto come:

$$1 + \sigma = 1 + \frac{1}{2} \frac{m_{W1}}{m} \frac{R_1^2}{\rho_1^2} \quad (1.49)$$

e quindi l'equazione diventa:

$$\ddot{u}(t) + \frac{\omega_0^2}{(1 + \sigma)} u(t) = -\frac{\ddot{u}_g(t)}{(1 + \sigma)} \quad (1.50)$$

Indipendentemente dalla massa, qualunque valore di inertanza può essere ottenuto variando opportunamente le dimensioni ( $R_1^2/\rho_1^2$ ) o il nume-

ro di volani (Eq. (1.43), considerando che  $m_R = m \sigma_1$ ). Nel caso di  $n$ -volani, ogni termine della serie nell'Eq. (1.43) è due ordini di grandezza più grande del precedente, pertanto la serie può essere approssimata dall'ultimo termine dell'equazione:

$$\sigma \simeq \frac{1}{2} \frac{m_{Wn}}{m} \frac{R_1^2 R_2^2 \dots R_n^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_n^2} \quad (1.51)$$

La forza trasferita al telaio chevron è:

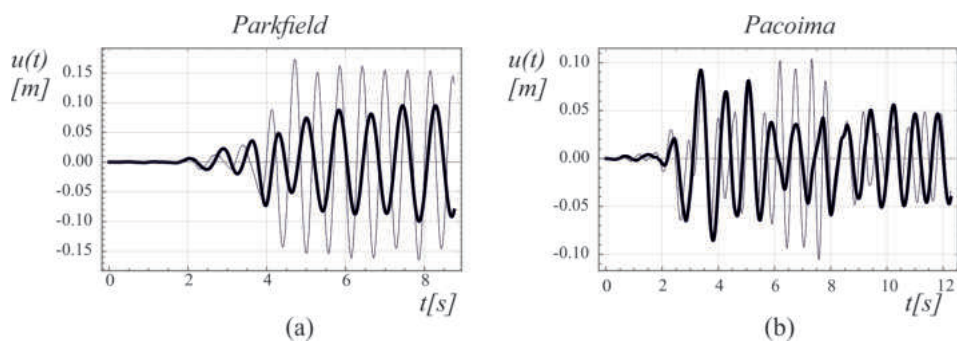
$$F_1(t) = \sigma m \ddot{u}(t) = m_R \ddot{u}(t) \quad (1.52)$$

La quantità  $m_R = \sigma m$  è una massa apparente nel sistema che è dovuta all'inerzia rotazionale dei volani.

Si consideri un telaio a tre piani, la cui massa di piano è  $m_p = 120.6 \times 10^3$  kg e il periodo sia definito dall'espressione  $T_1 = C_1 \times H^{\frac{3}{4}}$  (formula approssimata di stima del periodo secondo NTC2008). Le caratteristiche equivalenti del sistema 1-GDL sono  $m = 3m_p$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$ . La massa apparente generata dall'inertor è  $m_R = m$ . Il comportamento del telaio accoppiato con l'inertor è descritto dall' Eq. (1.50) dove  $\sigma = m_R/m$  mentre il telaio senza inertor è descritto dalla stessa equazione in cui  $\sigma = 0$ . La Fig. 1.11 mostra le storie temporali del sistema con inertor e senza inertor per due differenti registrazioni sismiche:

- Parkfield, CO2-065 ground motion registrato durante il terremoto della California 1966.
- Pacoima, Dam-164 ground motion registrato durante il terremoto di San Fernando, California 1971;

Le figure temporali mostrano che è possibile migliorare la risposta sismica del telaio, ma tali miglioramenti dipendono sia dall'azione esterna che dalle caratteristiche del telaio.



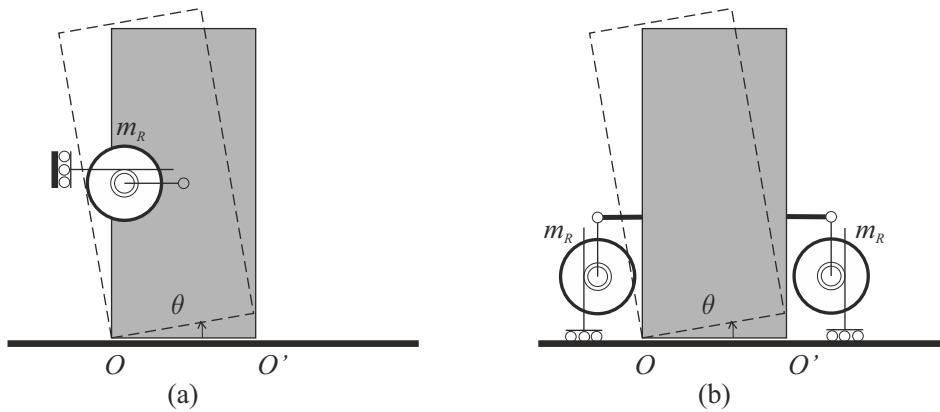
**Fig. 1.11:** Storie temporali del sistema telaio e inertor (linea spessa) e del solo telaio (linea sottile) per due differenti registrazioni sismiche: (a) Parkfield; (b) Pacoima.

### 1.5.2 L'utilizzo degli inerter per proteggere i blocchi rigidi dal ribaltamento

L'utilizzo di inerter per proteggere i blocchi rigidi dal ribaltamento è stato studiato in [60]. Lo scopo degli inerter è quello di fornire inerzia rotazionale supplementare. Il movimento di rocking è descritto dal modello di Housner:

$$\ddot{\theta} = -p^2(\sin(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta) + \frac{\ddot{u}_g}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta)) \quad (1.53)$$

Inoltre per un blocco rettangolare risulta che il parametro di frequenza è  $p = \sqrt{3g/4R}$ <sup>1</sup>. Le condizioni di impatto sono state discusse nella sezione precedente. I dispositivi inerter possono essere collegati al blocco come mostrato in Fig 1.12.



**Fig. 1.12:** Dispositivi inerter collegati ad un blocco rigido: (a) Inerter collegato in orizzontale e (b) Inerter collegato in verticale..

Se gli inerter sono disposti come in Fig 1.12a, allora essi vengono attivati dall'accelerazione relativa orizzontale, altrimenti se sono disposti come in Fig 1.12b l'attivazione è causata dall'accelerazione relativa verticale. Se si considera il caso di Fig 1.12a, la forza resistente nell'inerter è:

$$F_I = m_R R \ddot{\theta} \cos(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta) \quad (1.54)$$

L'equilibrio alla rotazione intorno al punto di pivot restituisce

$$(I_0 + m_R R^2 \cos^2(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta)) \ddot{\theta} + mgR \sin(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta) = -m \ddot{u}_g R \cos(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta) \quad (1.55)$$

<sup>1</sup> Il parametro  $p$ , chiamato parametro di frequenza, è un parametro per la caratterizzazione delle proprietà dinamiche e non rappresenta la frequenza di oscillazione del blocco che, come visto nella sezione precedente, non è costante.

dove  $I_0$  è il momento di inerzia intorno ai centri di rotazione O e O' e per blocchi rettangolari risulta  $I_0 = (4/3)mR^2$ , per cui l'equazione diventa

$$\left(\frac{4R}{3} + \sigma R \cos^2(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta)\right)\ddot{\theta} = -g \sin((\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta)) - \dot{u}_g \cos(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta) \quad (1.56)$$

con  $\sigma = m_R/m^2$ . Con semplici passaggi l'Eq. (1.56) può essere scritta:

$$\ddot{\theta} = -p_\sigma^2(\sin((\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta)) + \frac{u_g}{g} \cos(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta)) \quad (1.57)$$

con

$$p_\sigma = \sqrt{\frac{3g}{R(4 + 3\sigma \cos^2(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta))}} \quad (1.58)$$

Dalla Eq. (1.57) e dalla Eq. (1.58) si deduce che l'applicazione dell'inertor modifica il parametro di frequenza  $p$  riducendone il valore. Tale effetto dipende dall'entità della rotazione  $\theta$ , essendo massimo per  $\theta = \alpha$  e diminuendo gradualmente per valori di  $\theta$  maggiori. Come già evidenziato da Housner in [31], a parità di snellezza il blocco con il valore di  $p$  inferiore risulterà più stabile. E' importante osservare che in un blocco rigido  $p$  dipende esclusivamente da  $R$ , pertanto tale valore non può essere modificato senza alterarne la geometria. Gli inertor giocano proprio questo ruolo, fornendo ulteriore inerzia rotazionale al blocco senza la necessità di modificare le dimensioni del blocco stesso. Nel caso di blocchi molto snelli le equazioni possono essere linearizzate e quindi

$$\ddot{\theta} = -p_\sigma^2(\alpha \operatorname{sgn}(\theta) - \theta + \frac{u_g}{g}) \quad (1.59)$$

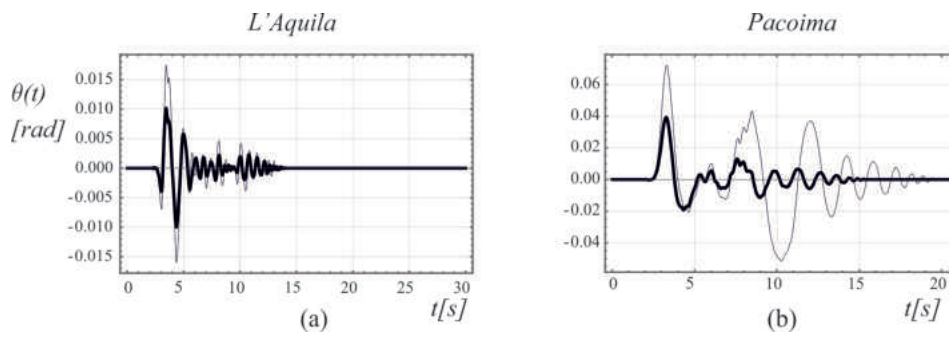
e il valore di  $p_\sigma$  diventa

$$p_\sigma = \sqrt{\frac{3g}{R(4 + 3\sigma)}} \quad (1.60)$$

Per valutare l'efficacia del blocco si applicano degli inertor ( $\sigma = 5$ ) ad un blocco rigido di dimensioni  $b = 0.5$  m e  $h = 6$  m. Il peso specifico del blocco è  $\rho = 25$  kN/m<sup>3</sup> e il suo spessore è  $s = 15$  m.

L'effetto dell'applicazione degli inertor sul blocco può essere visto in Fig 1.13, dove si osserva che il blocco con gli inertor manifesta rotazioni inferiori rispetto allo stesso blocco senza inertor.

<sup>2</sup>Definizione di  $\sigma$  analoga alla sezione precedente, l'unica differenza è che in questo caso  $m$  rappresenta la massa del blocco.



**Fig. 1.13:** Storie temporali della rotazione del blocco con inerter ( $\sigma = 5$ , linea spessa) e senza inerter ( $\sigma = 0$ , linea sottile) per due differenti registrazioni sismiche (a) L'Aquila e (b) Pacoima.

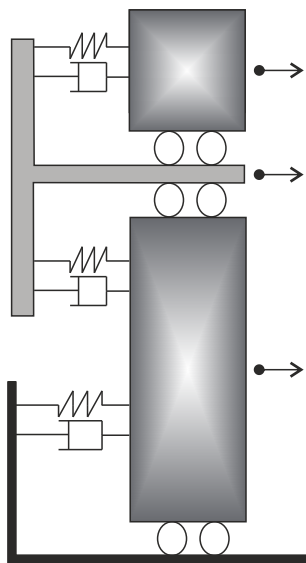


# DISCONTINUITÀ ED ISOLAMENTO IN PIANI INTERMEDI

---

## Abstract

The discontinuity or mid-story isolation is a strategy for the protection of frame structures and is studied in this chapter. In the thesis the name discontinuity is used since it represents a general variation of the stiffness in a structure. The part of the structure below the discontinuity is named substructure and the part above is name superstructure. The discontinuity couples the dynamical responses of substructure and superstructure. The chapter is divided in three parts. The first part studies the mechanical behaviour of the system and identifies the main parameters. The second part analyses the seismic response and compares the results obtained by archetype model with those obtained by a three-dimensional model. The last part introduces non linearities in the system by means of the Bouc-Wen model associated to the discontinuity layer.





# DISCONTINUITÀ ED ISOLAMEN- TO IN PIANI INTERMEDI

---

## Sommario

In questo capitolo viene studiata una strategia di protezione chiamata discontinuità o anche isolamento in piani intermedi. In questa tesi verrà utilizzato maggiormente il termine discontinuità in quanto essa rappresenta una generale variazione di rigidità all'interno di una struttura. La parte di struttura sotto la discontinuità è chiamata sottostruttura mentre la parte al di sopra della discontinuità è chiamata sovrastruttura. La discontinuità quindi accoppia le risposte strutturali delle due componenti, sovrastruttura e sottostruttura. Il capitolo è strutturato in tre parti. Nella prima parte verrà studiato il comportamento meccanico del sistema e ne verranno individuati i parametri principali. Nella seconda parte si analizzerà la risposta sismica ed i risultati sono poi confrontati con quelli ottenuti da un modello tridimensionale. Infine nell'ultima parte vengono studiate le non-linearità del sistema attraverso l'utilizzo del modello di plasticità di Bouc-Wen.

## 2.1 Discontinuità ed isolamento a piano intermedio

La discontinuità od isolamento a piani intermedi consiste nell'applicare un piano di discontinuità (in altre parole un sistema di isolatori) in un piano intermedio dell'edificio. La parte di struttura sotto il piano di discontinuità è chiamata sottostruttura mentre la parte al di sopra di tale piano è chiamata sovrastruttura. La discontinuità può quindi essere pensata come un accoppiamento tra due parti, sovrastruttura e sottostruttura, reso possibile attraverso l'introduzione del piano di discontinuità. I sistemi a base isolata (BI) e sistemi a Tuned Mass Damper (TMD) possono essere pensati come casi particolari in quanto in essi la discontinuità è posta, rispettivamente, alla base ed alla testa dell'edificio. Come si vedrà anche in seguito, nella discontinuità applicata a piani intermedi sussistono sia il funzionamento a BI che il funzionamento a TMD. Infatti, si può pensare come se la sovrastruttura agisca come Tuned Mass Damper per la sottostruttura. Allo stesso tempo, la sottostruttura agisce da filtro per il moto alla base e quindi è come se la sovrastruttura fosse isolata alla base. Questo studio si pone in continuità con il lavoro sviluppato in [5, 6]. Infatti questi lavori si sono occupati di sviluppare un modello generale che potesse rappresentare contemporaneamente sia il sistema BI che il sistema TMD. Questo modello generale è caratterizzato da due gradi di libertà e sebbene è in grado di rappresentare con elevata accuratezza i modelli BI e TMD, non è in grado di fornire risultati precisi nel caso di isolamento posto a piani intermedi. Per questo motivo, i modelli ridotti utilizzati in questo studio sono caratterizzati da tre gradi di libertà, così da poter tenere conto della dinamica di ogni componente del sistema, ovvero della sottostruttura, sovrastruttura e piano di discontinuità. Si ricorda infine che l'utilizzo di modelli archetipi per descrivere la dinamica principale di sistemi più complessi è molto diffuso in letteratura, basti ricordare ad esempio [1, 2, 7, 8, 24, 25].

### 2.1.1 Esempi di applicazioni dell'isolamento intermedio in edifici esistenti

La tecnologia della discontinuità intermedia (più comunemente chiamato isolamento in un piano intermedio) ha trovato numerose applicazioni in Giappone, mentre fatica ancora ad affermarsi nel resto del mondo. Que-

sta tecnologia trova dei vantaggi rispetto al sistema classico BI. Tali vantaggi possono essere sia di tipo economico che di tipo tecnico. Dal punto di vista economico, la discontinuità intermedia elimina il bisogno di svolgere costose lavorazioni sulla fondazione. Dal punto di vista tecnico, semplifica il miglioramento sismico di strutture esistenti in quanto è caratterizzata da spostamenti del piano di isolamento inferiori rispetto a BI. Nel caso di strutture esistenti in cui si voglia realizzare una sopraelevazione, si può inserire una discontinuità tra la struttura esistente ed il piano da realizzare e quindi migliorare la risposta dinamica della struttura ([63, 64]). Inoltre, nel caso di edifici alti, le prestazioni di una discontinuità intermedia sono di solito superiori a quelle di BI, come mostrato in [65]. Un edificio in un cui è stata applicata questa tecnica è l'Idabashi 1st Building [66, 67]. Questo edificio ha 14 piani fuori terra, 2 piani interrati, 1 attico e la discontinuità è posizionata tra il nono ed il decimo piano. La sovrastruttura è composta da pareti di taglio mentre la sottostruttura è composta da una struttura acciaio-calcestruzzo. La discontinuità è composta da 40 isolatori in gomma e 212 smorzatori in piombo. Un'altro esempio è l'edificio Shiodome Sumitomo [67, 68] a Tokyo. Esso possiede tre piani interrati e 25 piani fuori terra. In questo caso la discontinuità è posizionata nella parte inferiore del 12-simo piano ed è realizzata con 41 isolatori in gomma, 100 smorzatori in piombo e 14 in acciaio. Questi edifici sono molto diversi l'uno dall'altro e mostrano come l'applicazione di questa tecnologia richiede un'attenta valutazione da parte del progettista. L'Idabashi 1st Building ha una sovrastruttura molto rigida e pertanto la sua applicazione è molto simile a quella di BI. D'altra parte, lo Shiodome Sumitomo ha una sovrastruttura molto più pesante e flessibile della sottostruttura dovuta sia ad un maggiore numero di piani della sovrastruttura che ad un largo spazio vuoto dove si trova l'atrio. Questa particolare distribuzione di masse e rigidezze nella sottostruttura e sovrastruttura è stata affrontata con una soluzione specifica: oltre alla realizzazione della discontinuità intermedia, è stato necessario introdurre colonne perimetrali per rinforzare l'ampio spazio aperto. Tali colonne sono state progettate appositamente per prevenire fenomeni di buckling [69]. Un'altra applicazione degna di nota è il centro di addestramento del personale della Taisei Corp. in Giappone. Il sistema BI non poteva essere utilizzato poichè sarebbe stato molto difficile posizionare gli isolatori sotto la fondazione esistente, la quale si trovava lungo un pendio [70]. Così si è scelto di realizzare una discontinuità intermedia posizionandola all'ottavo piano. Il tempo totale necessario per l'intervento è stato di nove mesi e quindi il metodo utilizzato per sorreggere la sovrastruttura durante il ta-

glio delle colonne è stato progettato per mantenere l'edificio in sicurezza anche in caso di terremoto.

## 2.2 Lo schema meccanico

Il piano di discontinuità può essere posizionato sia sotto che sopra il piano  $L_d$ -simo. Nella Fig. 2.1 la posizione del piano di discontinuità si trova sotto il piano  $L_d$ . Pertanto è necessario inserire degli irrigidimenti sotto la discontinuità (SF di Fig. 2.1a) in modo da ricostituire la rigidità planare che il sistema aveva prima dell'inserimento del piano di discontinuità. La modellazione del sistema M-GDL avviene attraverso un modello archetipo a 3-GDL, dove ogni grado di libertà rappresenta il comportamento di sottostruttura, piano di discontinuità e sovrastruttura. Nel caso specifico,  $u_1$  è lo spostamento del piano sotto la discontinuità,  $u_d$  è lo spostamento del piano di discontinuità e  $u_2$  è lo spostamento sulla testa del telaio. La procedura di equivalenza dinamica tra modello M-GDL e 3-GDL sviluppata in [5] la si può trovare in forma estesa in appendice A.1. È importante notare che la procedura di equivalenza determina i parametri  $k_1$  e  $k_2$  sulla struttura senza discontinuità. Si assume che l'uso di irrigidimenti (SF in Fig. 2.1a) ripristina il precedente valore di rigidità della sottostruttura. Le masse sono valutate considerando le effettive masse presenti sotto e sopra il piano di discontinuità. Pertanto le masse sono:

$$m_1 = m_p \times (L_d - 1) + m_0; \quad m_2 = (N - L_d) \times m_p; \quad m_d = m_p; \quad (2.1)$$

dove  $N$  è il numero di piani del telaio,  $m_p$  è la massa di piano<sup>1</sup> e  $m_0$  è la massa associata agli irrigidimenti, definita come  $m_0 = \gamma_s m_p$  (con  $\gamma_s = 0.5$ ).

In questa tesi, il comportamento della discontinuità viene descritto con tre diversi modelli, in funzione del tipo di analisi che si è svolta. Infatti, nello studio del comportamento qualitativo del meccanico è stato utilizzato un modello lineare associato ad uno smorzamento alla Rayleigh classico. In seguito, per poter descrivere meglio la risposta sismica tenendo conto del maggiore smorzamento della discontinuità, è stato utilizzato un modello lineare associato ad uno smorzamento alla Rayleigh di tipo non classico. Questo si rivela utile in quanto un modello lineare permette di avvalersi delle proprietà di spettro-compatibilità. Nelle analisi finali si è adoperato un modello non lineare dove il legame costitutivo della discontinuità è descritto dal modello di Bouc-Wen.

<sup>1</sup>La massa di piano è considerata costante su tutti i piani.

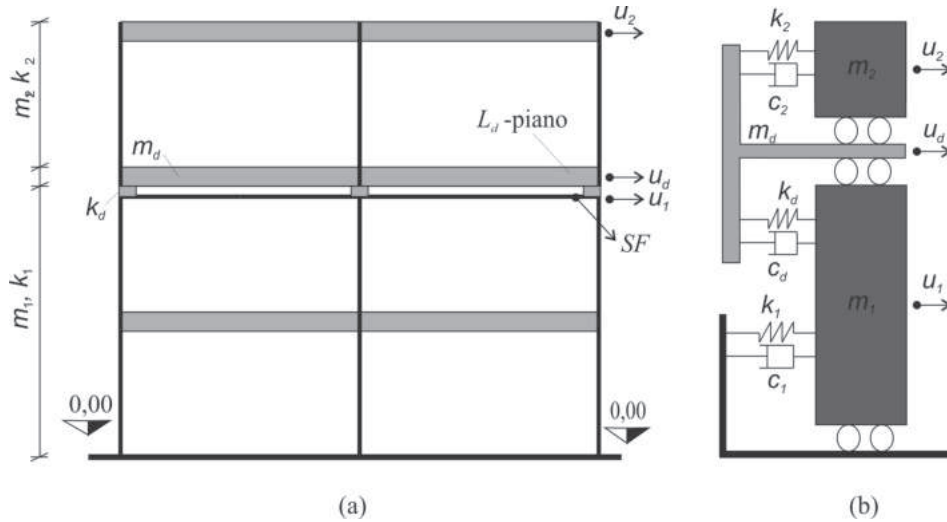


Fig. 2.1: Schema meccanico della discontinuità (a) Modello M-GDL; (b) modello archetipo a 3-GDL.

## 2.3 Il comportamento qualitativo della discontinuità

### 2.3.1 Il modello meccanico e le equazioni del moto

#### 2.3.1.1 Il modello archetipo lineare

Le equazioni del moto, ottenute con un approccio diretto, sono:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}a_g(t) \quad (2.2)$$

dove

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_d & -c_d & 0 \\ -c_d & c_d + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_d & -k_d & 0 \\ -k_d & k_d + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_d(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

e dove  $k_d$  e  $c_d$  rappresentano la rigidità ed il coefficiente di smorzamento del piano di discontinuità;  $a_g(t)$  è l'accelerazione alla base;  $\mathbf{r}$  è il vettore di trascinato di dimensioni  $(3 \times 1)$ , contenente tutti termini uguali all'unità.

Al fine di poter verificare se l'introduzione di una discontinuità è effettivamente in grado di migliorare il comportamento della struttura su cui viene introdotta, è necessario definire due modelli ausiliari. Il primo modello ausiliario (A) (Fig. 2.2a) deriva dal modello archetipo a tre gradi di libertà

in cui la discontinuità viene sostituita da un collegamento rigido. In altre parole, il modello ausiliario A rappresenta la struttura prima che venga inserita la discontinuità. Le equazioni del moto hanno forma analoga alla Eq. (2.2) dove la matrici di massa, rigidità e smorzamento sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_A &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_A = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_A &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^A(t) = \begin{pmatrix} u_1^A(t) \\ u_2^A(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Se gli spostamenti del modello principale (Fig. 2.1b) sono più piccoli di quelli del modello ausiliario A (Fig. 2.2a), allora la discontinuità è in grado di migliorare il comportamento dinamico del telaio. Per distinguere gli spostamenti forniti da questo sistema ausiliario, viene utilizzato l'apice A. I valori di rigidità del sistema ausiliario A sono  $k_1$  e  $k_2$  mentre le masse sono definite nel seguente modo:

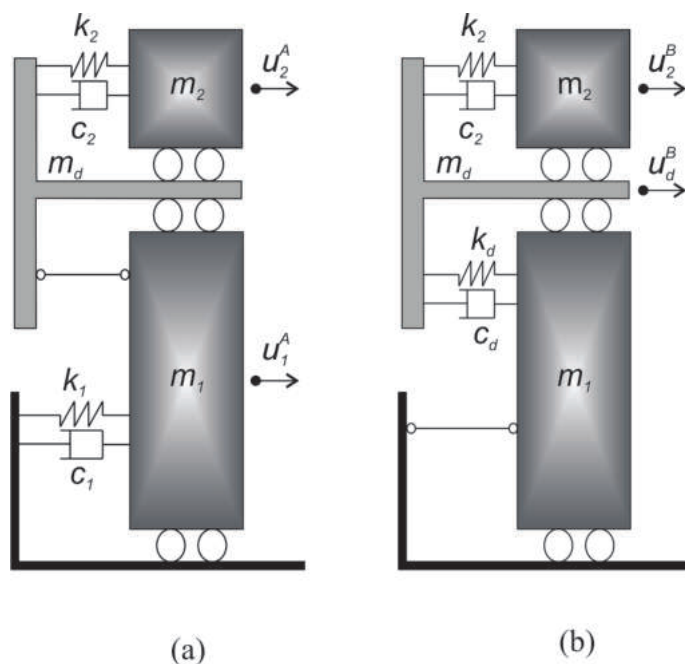
$$m_1 = L_d \times m_p; \quad m_2 = (N - L_d) \times m_p; \quad (2.5)$$

Viene poi introdotto il modello ausiliario B (Fig. 2.2b). Esso deriva dal modello a tre gradi libertà di Fig. 2.1b sostituendo la molla di rigidità  $k_1$  con un collegamento rigido. Tale modello rappresenta la sovrastruttura con il piano di discontinuità alla sua base, posizionata direttamente sul terreno. Analogamente al modello ausiliario A, anche il modello ausiliario B diventa un sistema a due gradi di libertà. Le equazioni del moto sono analoghe a quelle del modello A, dove le matrici di massa, smorzamento e rigidità sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_B = \begin{bmatrix} c_d + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_B &= \begin{bmatrix} k_d + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}^B(t) = \begin{pmatrix} u_d^B(t) \\ u_2^B(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Questo secondo modello ausiliario vuole verificare se la sottostruttura ha un effetto di filtro positivo nel trasmettere l'eccitazione causata dal moto alla base verso la sovrastruttura. Per poter distinguere il campo di spostamento di questo modello dagli altri precedentemente introdotti, viene utilizzato l'apice B. I valori di rigidità di questo modello a 2-GDL sono  $k_d$  e  $k_2$ , mentre i valori di massa sono

$$m_d = m_p; \quad m_2 = (N - L_d) \times m_p; \quad (2.7)$$



**Fig. 2.2:** Modelli ausiliari e relativi spostamenti: (a) Modello ausiliario A; (b) modello ausiliario B.

Nelle analisi armoniche si considera uno smorzamento classico alla Rayleigh sia per i modelli archetipi che per il modello M-GDL. Le matrici di smorzamento  $\tilde{C}$  del modello principale (Eq. (2.8)) e dei due modelli ausiliari (Eq. (2.12)) sono considerate proporzionali alle matrici di massa e rigidità. I due coefficienti  $\tilde{\alpha}$  e  $\tilde{\beta}$  sono ottenuti imponendo che  $\tilde{\xi}_1$  e  $\tilde{\xi}_2$  dei primi due modi oscillatori del modello principale e dei modelli ausiliari sono  $\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi}_2 = 0.05$ . La procedura di equivalenza dinamica per la determinazione di  $k_1$  e  $k_2$  può essere trovata in Appendice A.1.

### 2.3.1.2 Modelli principali e ausiliari a M-GDL

L'obiettivo di questa sezione è confermare la validità del modello archetipo. Per questo motivo, i risultati ottenuti dai modelli archetipi vengono confrontati con i risultati ottenuti da modelli M-GDL ad elevato numero di gradi di libertà. Assumendo che vi sia regolarità nella distribuzione di masse e rigidità, un edificio a  $N$  piani è modellato come un telaio shear-type a  $N$  gradi di libertà, la cui massa e rigidità di piano sono rispettivamente  $m_p$  e  $k_p$ . Dopo l'introduzione di una discontinuità appare un grado di libertà aggiuntivo associato al piano di discontinuità, così che il sistema sia caratterizzato da  $M$  gradi di libertà, dove  $M = N + 1$ . Il simbolo  $(\cdot)$  è utilizzato per differenziare le quantità che si riferiscono al telaio M-GDL dalle quantità riferite ai modelli archetipi. Riferendosi al sistema di Fig. 2.3a, l'equazione del moto del telaio con una discontinuità applicata al  $L_d$ -simo

piano si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}(t) = -\tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{r}}a_g(t) \quad (2.8)$$

dove  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  e  $\tilde{\mathbf{K}}$  sono le matrici di massa, smorzamento e rigidezza;  $\tilde{\mathbf{r}}$  è il vettore di trascinarsimento di dimensioni  $(N + 1 \times 1)$ , contenente tutti termini uguali all'unità. La matrice delle masse è:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{L_d} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{L_d+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m_{N+1} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Si osserva che quando la discontinuità è posizionata sotto  $L_d$ -simo piano (Fig. 2.3a), le colonne sono tagliate sulla testa, i dispositivi di isolamento sono posizionati sotto il piano e degli irrigidimenti sono utilizzati per ripristinare la rigidezza che il telaio aveva prima del taglio. Pertanto, nella matrice delle masse, tutti gli elementi sono uguali alla massa di un unico piano  $m_p$  eccetto  $m_{L_d} = m_0 = \gamma_s m_p$ , la quale rappresenta la massa degli irrigidimenti ( $\gamma_s = 0.5$ ). Inoltre  $m_{L_d+1} = m_d = m_p$  è la massa del piano di discontinuità. Poichè le matrici di smorzamento e di rigidezza hanno forma simile, si riporta solo quest'ultima:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -k_{L_d} & k_{L_d} + k_{L_d+1} & -k_{L_d+1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_N & k_N + k_{N+1} & -k_{N+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_{N+1} & k_{N+1} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

dove  $k_{L_d+1} = k_d$  è la rigidezza associata alla discontinuità posizionata sotto il piano  $L_d$ -simo e tutte le altre  $k_i = k_p$  sono le rigidezze associate al telaio; la discontinuità può essere applicata ad ogni livello del telaio variando dal piano primo al piano  $N - 1$ , dove  $N$  è il numero di piani. Al fine di rendere i risultati più comprensibili, la rigidezza della discontinuità è parametrizzata come  $k_d = \rho k_p$ .

Il vettore degli spostamenti è definito come:

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) = \left\{ \tilde{u}_1(t) \quad \tilde{u}_2(t) \quad \dots \quad \tilde{u}_{N-1}(t) \quad \tilde{u}_{N+1}(t) \right\}^T \quad (2.11)$$

Si introducono poi i due modelli ausiliari A e B che hanno, rispettivamente,  $N$  e  $M - L_d$  gradi di libertà. Questi modelli sono rappresentati in Fig. 2.3b e Fig. 2.3c. Nello specifico Fig. 2.3b rappresenta il modello ausiliario A<sup>2</sup> mentre Fig. 2.3c rappresenta il modello ausiliario B<sup>3</sup>. Poiché i sistemi ausiliari hanno matrici di massa, smorzamento e rigidezza e vettori di spostamento differenti, allora viene utilizzato un apice per differenziarli. Per il modello ausiliario A si utilizza l'apice  $A$  mentre per il modello ausiliario B si utilizza l'apice  $B$ .

Le equazioni del moto dei sistemi ausiliari sono:

$$\tilde{\mathbf{M}}^{A,B} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}^{A,B}(t) + \tilde{\mathbf{C}}^{A,B} \dot{\tilde{\mathbf{u}}}^{A,B}(t) + \tilde{\mathbf{K}}^{A,B} \tilde{\mathbf{u}}^{A,B}(t) = -\tilde{\mathbf{M}}^{A,B} \tilde{\mathbf{r}}^{A,B} a_g(t) \quad (2.12)$$

La matrice di massa  $\tilde{\mathbf{M}}^A$  del modello ausiliario A è:

$$\tilde{\mathbf{M}}^A = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m_N \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

dove  $m_i = m_p$  sono le masse dei piani (Fig. 2.3b). la matrice di rigidezza  $\tilde{\mathbf{K}}^A$  del modello ausiliario A è:

$$\tilde{\mathbf{K}}^A = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{N-1} & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_N & k_N \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

dove  $k_i = k_p$  sono le rigidezze di piano (Fig. 2.3b). Il vettore degli spostamenti  $\tilde{\mathbf{u}}^A$  del modello ausiliario A è definito come:

$$\tilde{\mathbf{u}}^A(t) = \left( \tilde{u}_1^A(t) \quad \tilde{u}_2^A(t) \quad \dots \quad \tilde{u}_{N-1}^A(t) \quad \tilde{u}_N^A(t) \right)^T \quad (2.15)$$

La quantità  $\tilde{\mathbf{r}}^A$  in Eq. (2.12) è il vettore di trascinamento di dimensioni  $(N \times 1)$ , contenente tutti termini uguali all'unità. La matrice di smorzamento  $\tilde{\mathbf{C}}^A$

<sup>2</sup>Si ricorda che il modello ausiliario A rappresenta la struttura prima dell'introduzione della discontinuità.

<sup>3</sup>Il modello ausiliario B si ottiene portando ad infinito la rigidezza della sottostruttura ovvero posando la discontinuità direttamente sul terreno.

ha la stessa forma della matrice di rigidezza e pertanto non è riportata.

Il modello ausiliario  $B$  (Fig. 2.3c) è descritto da  $M - L_d$  gradi di libertà, dove  $M = N + 1$ . La matrice di massa  $\tilde{\mathbf{M}}^B$  è:

$$\tilde{\mathbf{M}}^B = \begin{pmatrix} m_{L_d+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{L_d+2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & m_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & m_{N+1} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

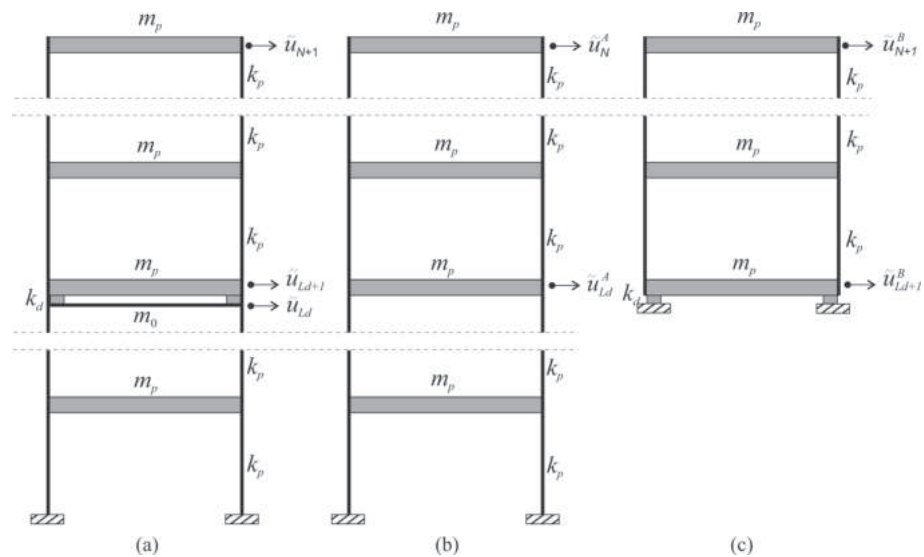
mentre la matrice di rigidezza  $\tilde{\mathbf{K}}^B$  è:

$$\tilde{\mathbf{K}}^B = \begin{pmatrix} k_{L_d+1} + k_{L_d+2} & -k_{L_d+2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -k_{L_d+2} & k_{L_d+2} + k_{L_d+3} & -k_{L_d+3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_N & k_N + k_{N+1} & -k_{N+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{N+1} & k_{N+1} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

dove  $m_{L_d+1} = m_d = m_p$  è la massa del piano di discontinuità e  $k_{L_d+1} = k_d$  è la sua rigidezza (Fig. 2.3c). Il vettore degli spostamenti  $\tilde{\mathbf{u}}^B$  è

$$[\tilde{\mathbf{u}}^B(t)] = \left( \tilde{u}_{L_d+1}^B(t) \quad \tilde{u}_{L_d+2}^B(t) \quad \dots \quad \tilde{u}_N^B(t) \quad \tilde{u}_{N+1}^B(t) \right)^T \quad (2.18)$$

$\tilde{\mathbf{r}}^B$  nella Eq. (2.12) è il vettore di trascinate di dimensioni  $(M - L_d \times 1)$ , contenente tutti termini uguali all'unità. Anche in questo caso la matrice di smorzamento  $\tilde{\mathbf{C}}^B$  ha una forma analoga alla matrice di rigidezza e quindi non viene riportata.



**Fig. 2.3:** Modelli M-MOD ed archetipi: (a) Principale (b) Ausiliario A; (c) Ausiliario B.

### 2.3.2 Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno

I risultati del modello archetipo sono comparati con quelli dei sistemi ausiliari per verificare se la discontinuità è in grado di migliorare il comportamento dinamico del telaio. A questo scopo si introducono tre coefficienti di guadagno:

$$\alpha_1 = \frac{\max[u_1(t)]}{\max[u_1^A(t)]}; \quad \alpha_2 = \frac{\max[u_2(t) - u_d(t)]}{\max[u_2^A(t) - u_1^A(t)]}; \quad \alpha_3 = \frac{\max[u_d(t) - u_1(t)]}{\max[u_d^B(t)]} \quad (2.19)$$

In particolare, il coefficiente  $\alpha_1$  consente di valutare gli effetti della discontinuità sulla sottostruttura mentre il coefficiente di guadagno  $\alpha_2$  valuta la capacità della discontinuità di ridurre il drift della sovrastruttura. Infine, il coefficiente di guadagno  $\alpha_3$  si riferisce esclusivamente allo spostamento del piano di discontinuità e misura l'abilità della sottostruttura di ridurre lo spostamento del piano di discontinuità rispetto al caso in cui il piano di discontinuità fosse posto direttamente sul terreno. Se i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità, allora la discontinuità è benefica per la specifica parte della struttura.

In questa sezione viene fatta un'assunzione circa il comportamento del telaio. Se l'edificio ha una distribuzione regolare di massa e rigidezza, allora si può assumere che il suo periodo sia definito dalla seguente formula semplificata:

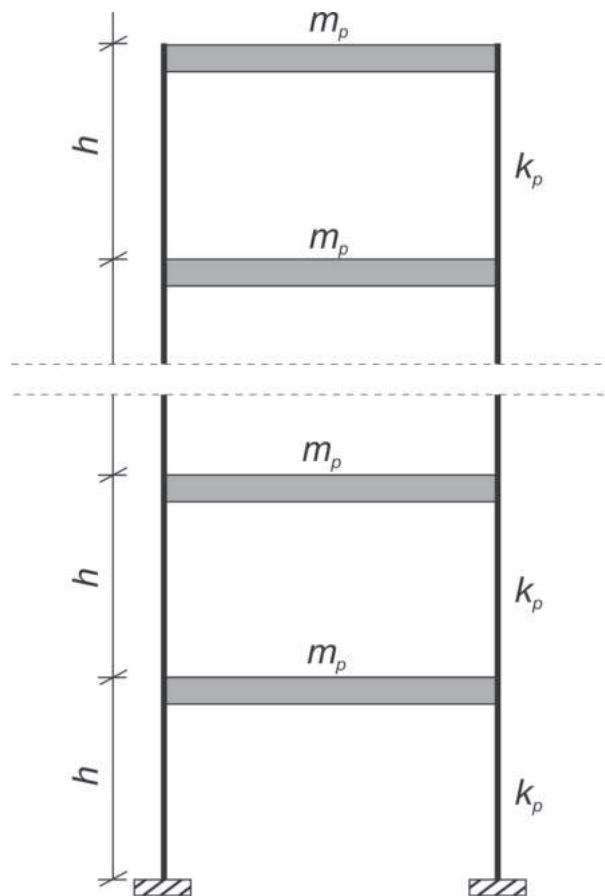
$$T_1 = C_1 H^{\frac{1}{2-\zeta}} \quad (2.20)$$

dove  $\zeta = 2/3$ , come proposto dalle norme tecniche degli Stati Uniti (UBC 1997) e  $C_1 = 0.075$ , come proposto dagli Eurocodici EC8 (CEN 2004);  $H$  è l'altezza dell'edificio. Pertanto il periodo fondamentale approssimato dipende solo dall'altezza del telaio. Così, se un edificio è regolare, a valori più alti della massa corrispondono valori più alti di rigidezza ed edifici che hanno stessa altezza ma masse diverse sono caratterizzati dallo stesso periodo fondamentale.

Di conseguenza i coefficienti di guadagno che si riferiscono ad un edificio di sei piani saranno gli stessi qualunque sia la superficie (e quindi la massa) dell'edificio. In altre parole, i coefficienti di guadagno non dipendono dai specifici valori di massa e rigidezza, ma solo dal periodo dell'edificio. Il modello archetipo presentato può quindi essere assunto come rappresentativo di una classe di strutture, sulle basi di un criterio di approssimazione. Tale criterio di approssimazione risiede nella stima approssimata del periodo fondamentale la cui formula è riportata nella (2.20). I parametri varia-

bili delle analisi sono il livello  $L_d$  in cui viene introdotta la discontinuità ed il rapporto di rigidezza  $\rho = k_d/k_p$  dove  $k_d$  è la rigidezza della discontinuità mentre  $k_p$  è la rigidezza del singolo piano, assunta costante in elevazione.

Nelle seguenti analisi, le caratteristiche meccaniche del modello archetipo si riferiscono a differenti telai shear-type. Le loro principali caratteristiche sono mostrate in Fig. 2.4, i cui valori sono riportati in Tab. 2.1. Nello specifico, la massa  $m_p$  è riferita ad un edificio con una superficie in pianta di 250 m<sup>2</sup>.



**Fig. 2.4:** Telaio shear-type di riferimento.

Piani	Massa $m_p$	Rigidezza $k_p$	Alt. $h$	Alt. Tot. $H$	Periodo $T_1$
6	301.5 t	476779 kN/m	3.0 m	18 m	0.66 s
10	301.5 t	576490 kN/m	3.0 m	30 m	0.96 s

**Tabella 2.1:** Caratteristiche degli edifici.

La Tab. 2.2 riporta le caratteristiche meccaniche dei modelli archetipi equivalenti ai due telai di Tab. 2.1. Come mostrato dalla procedura di equivalenza riportata in Appendice 3.4, le caratteristiche meccaniche del modello archetipo dipendono dalla posizione del piano di discontinuità ( $L_d$ ).

**Tabella 2.2:** Caratteristiche meccaniche del modello archetipo 3-GDL.

$L_d$	6-Piani				10-Piani			
	$m_1$ [t]	$m_2$ [t]	$k_1$ [kN/m]	$k_2$ [kN/m]	$m_1$ [t]	$m_2$ [t]	$k_1$ [kN/m]	$k_2$ [kN/m]
1	150.75	1507.5	602403	182552	150.75	2713.5	788388	136266
2	452.25	1206.0	292175	208389	452.25	2412.0	374297	146252
3	753.75	904.5	207567	250374	753.75	2110.5	245815	159576
4	1055.25	603.0	177681	324132	1055.25	1809.0	188291	177584
5	1356.75	301.5	167962	476779	1356.75	1507.5	158790	202532
6					1658.25	1206.0	142968	238504
7					1959.75	904.5	134630	293687
8					2261.25	603.0	130613	387209
9					2562.75	301.5	129072	576489

### 2.3.2.1 Eccitazione esterna

Le analisi di questa sezione sono svolte considerando un'accelerazione armonica alla base:

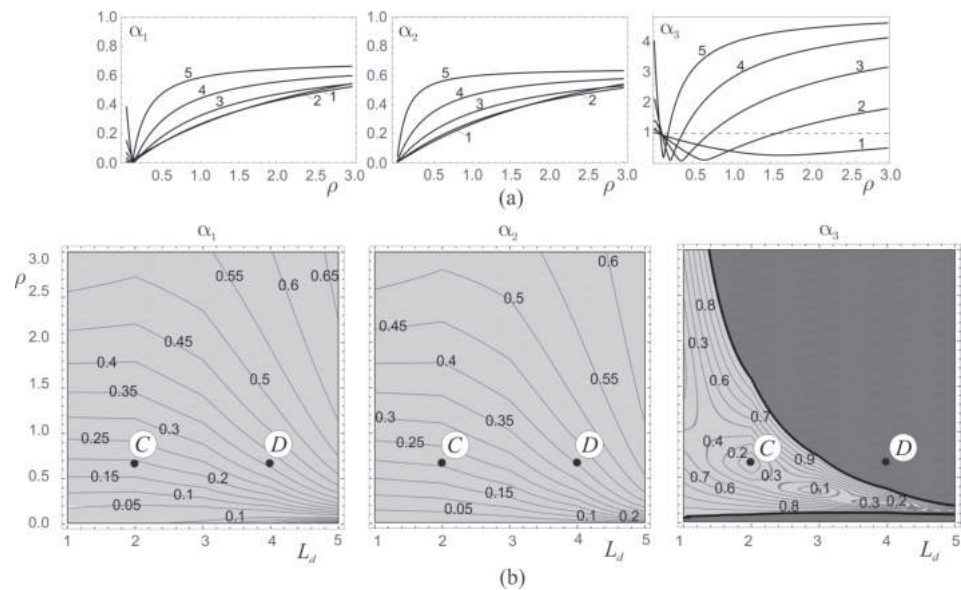
$$a_g(t) = a_{g0} \sin(\Omega t) \quad (2.21)$$

dove  $a_{g0}$  è l'ampiezza dell'eccitazione e  $\Omega$  è la sua frequenza circolare. L'ampiezza è indipendente da  $\Omega$ . Poiché i modelli sono lineari e i coefficienti di guadagno sono definiti dal rapporto di spostamenti o drift, allora i coefficienti di guadagno non dipendono dall'ampiezza  $a_{g0}$  dell'eccitazione armonica. Inoltre nelle analisi viene trascurato il transitorio, pertanto i coefficienti  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  sono valutati in condizioni stazionarie.

### 2.3.3 Mappe di guadagno

La prima struttura analizzata è un telaio shear-type a sei piani. In Fig. 2.5a i tre grafici mostrano i coefficienti di guadagno  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  ottenuti variando il rapporto di rigidità  $\rho$  sotto un'eccitazione armonica con  $\Omega = 10 \text{ rad/s}$ . Ogni grafico contiene cinque curve, ognuna riferita ad un livello diverso del piano di discontinuità. L'intervallo del parametro  $\rho$  dove tali curve sono più piccole dell'unità sono intervalli in cui la discontinuità è in grado di migliorare la risposta dinamica del telaio. Per semplificare la comprensione dei risultati, le curve di ogni grafico sono riordinate in mappe. Si ottengono così le mappe mostrate in Fig. 2.5b. Queste mappe hanno significato solo lungo le linee verticali passanti per numeri interi dell'asse orizzontale, le quali rappresentano il livello in cui si introduce la discontinuità. Le mappe sono ottenute applicando una interpolazione lineare tra i valori presenti lungo le verticali. Le regioni dove i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità sono marcate con un colore grigio chiaro. Al contrario le regioni dove i coefficienti di guadagno sono maggiori dell'unità sono marcate di

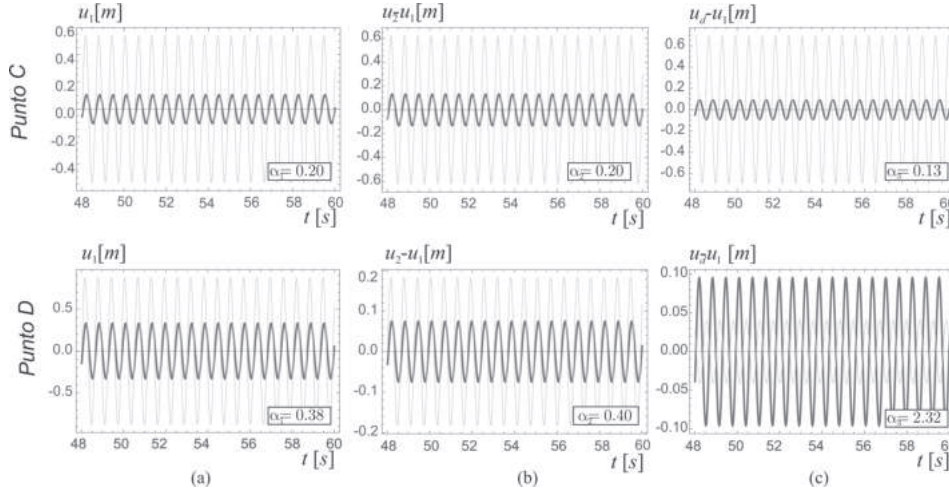
un colore grigio scuro. In queste regioni l'introduzione di una discontinuità peggiora la risposta dinamica del telaio.



**Fig. 2.5:** Coefficienti di guadagno per un telaio di sei piani: (a) curve di guadagno; (b) mappe di guadagno.

Nella Fig. 2.6a viene effettuata una comparazione tra le storie temporali del modello principale (linea spessa) e ausiliario (linea sottile) per i due punti indicati dalle lettere C e D in Fig. 2.5. Poichè entrambi i punti C e D sono all'interno delle regioni di guadagno delle mappe  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , gli spostamenti della sottostruttura (Fig. 2.6a) e i drift della sovrastruttura (Fig. 2.6b) sono più piccoli dei corrispettivi spostamenti forniti dal sistema ausiliario A. Poichè nel punto C  $\alpha_3 < 1$ , allora lo spostamento del piano di disconnessione è inferiore a quello fornito dal modello ausiliario B (grafico in alto della Fig. 2.6c). Al contrario il punto D è fuori dalle regioni di guadagno di  $\alpha_3$ . In tal caso il piano di discontinuità del modello principale ha spostamenti più elevati di quello fornito dal modello ausiliario B (seconda riga di Fig. 2.6c).

In Fig. 2.7 le mappe di guadagno di  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , che si riferiscono ad un telaio di sei piani, sono organizzate in forma matriciale. Nello specifico, ogni riga si riferisce ad una differente frequenza circolare  $\Omega$  dell'eccitazione armonica, laddove le tre colonne si riferiscono ai tre coefficienti di guadagno. Le mappe di guadagno dipendono fortemente dalla frequenza circolare dell'eccitazione. Comunque, è possibile osservare ampie regioni nelle quali i coefficienti di guadagno sono più piccoli dell'unità (regioni grigio chiaro). In particolare si può osservare che, per piccoli valori di  $\Omega$ , la mappa  $\alpha_3$  manifesta vantaggi solo quando la discontinuità è posizionata ai piani inferiori. Questo fatto si verifica poiché, quando la di-



**Fig. 2.6:** Storie temporali del sistema principale (linea spessa) e dei sistemi ausiliari (linea sottile): (a) Spostamenti della sottostruttura  $u_1$  e  $u_1^A$ ; (b) Drift della sovrastruttura  $u_2 - u_1$  e  $u_2^A - u_1^A$ ; (c) Spostamento del piano di discontinuità  $u_d - u_1$  e  $u_d^B$ .

scontinuità è posizionata ai livelli inferiori, la frequenza della sovrastruttura diventa molto diversa da quella dell'eccitazione esterna assicurando piccoli spostamenti nella sovrastruttura. Comunque, per ogni frequenza  $\Omega$ , ci sono ampi intervalli nel piano dei parametri dove tutti i tre coefficienti sono inferiori dell'unità. Se  $L_d$  e  $\rho$  sono scelti all'interno di tali intervalli, allora è possibile migliorare sia il comportamento della sovrastruttura e della sottostruttura.

Dall'osservazione di Fig. 2.7, si nota che dentro le mappe  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  c'è sempre un locus di valori minimi. Al contrario,  $\alpha_2$  non ha un locus di minimo. La possibilità di descrivere questi minimum loci attraverso leggi analitiche può essere un aspetto interessante per l'interpretazione fisica e l'ottimizzazione del sistema. [5] ha proposto due leggi empiriche per descrivere i loci di minimo. Tuttavia in tale lavoro le mappe erano ottenute con un valore costante di  $\beta = \Omega/\omega_1$ , mentre in questo lavoro  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$  cambia in funzione di  $L_d$ . Comunque, considerata la regolarità dei loci di minimo non è difficile ottenere leggi empiriche che li descrivano. Nello specifico per descrivere il locus di minimo sulla mappa  $\alpha_1$  viene proposta la seguente formulazione:

$$\text{Minima locus } \alpha_1 : \rho = \gamma \cdot \beta(L_d) \cdot \frac{k_1(L_d)}{k_p} \cdot \frac{N - L_d + 1}{N} \quad (2.22)$$

dove  $\gamma = \Omega/\Omega_1$  con  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$  (Eq. (2.20)) è una costante;  $\beta(L_d) = \Omega/\omega_1(L_d)$ , con  $\omega_1(L_d) = \sqrt{k_1(L_d)/m_1(L_d)}$ ;  $k_1(L_d)$  e  $m_1(L_d)$  sono la rigidezza e la massa della sottostruttura nel modello archetipo 3-GDL (Fig. 2.1b), che dipendono da  $L_d$ ;  $k_p$  è la rigidezza di un singolo piano, i cui valori so-

no riportati in Tabella 2.1. Il locus dei minimi nella mappa  $\alpha_3$  può essere espresso dalla relazione:

$$\text{Minima locus } \alpha_3 : \rho = \frac{1}{2}\gamma^2 \cdot \frac{1}{L_d - \gamma^2} \quad (2.23)$$

Si ricorda che le equazioni Eq. (2.22) e Eq. (2.23) sono relazioni discrete, poiché dipendono dalla quantità  $L_d$  che può essere rappresentata solamente da numeri naturali. Questi loci di minimo nelle mappe di guadagno sono rappresentati da cinque punti<sup>4</sup>. Si può osservare dalle mappe  $\alpha_1$  e  $\alpha_3$  che per frequenze dell'eccitazione armonica  $\Omega = 10,0$  e  $\Omega = 15,00$  (prima e terza riga di Fig. 2.7), i cinque punti forniti da Eq. (2.22) e (2.23) (simbolo cerchio-croce) descrivono bene i loci di minimo nelle mappe. Per ottenere le relazioni sui loci di minimo capaci di rappresentare correttamente ampie classi di strutture a telaio sarebbero necessarie analisi più approfondite basate su approcci probabilistici. Tuttavia questo esula dallo scopo di questa tesi.

L'analisi viene poi ripetuta su un telaio a dieci piani e i risultati sono riportati in Fig. 2.8. Questo telaio è caratterizzato da un valore del periodo fondamentale più elevato rispetto a quello del telaio a sei piani. Questo fatto rende la discontinuità meno efficace per valore più elevati della frequenza dell'eccitazione armonica  $\Omega$ , poiché in questo intervallo sia i modelli ausiliari che il modello principale sono poco eccitati. Infatti, le regioni di guadagno nelle mappe delle ultime due righe di Fig. 2.8 hanno valori dei coefficienti di guadagno prossimi all'unità. Nelle regioni grigio scuro di  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , i coefficienti sono leggermente più alti dell'unità. Esistono comunque ampie aree dove i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità. Infine, si osserva che sia le mappe di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  tendono ad essere dei piani piatti con valore unitario quando  $\rho$  tende ad infinito. Questo si verifica perché, quando  $\rho$  tende ad infinito, il modello principale tende al modello ausiliario A.

### 2.3.4 Interpretazione dei risultati

Poiché il modello è lineare, i risultati ottenuti in Fig. 2.7 e Fig. 2.8 possono essere spiegati qualitativamente da un'analisi modale. Si osserva che la discontinuità introdotta ad un livello intermedio della struttura si comporta come una base isolata (BI) per la sovrastruttura ed allo stesso tempo come Tuned Mass Damper (TMD) per la sottostruttura, come già discusso anche

<sup>4</sup>Se si considera un telaio a sei piani, si avranno 5 possibili piani di discontinuità e quindi 5 punti.

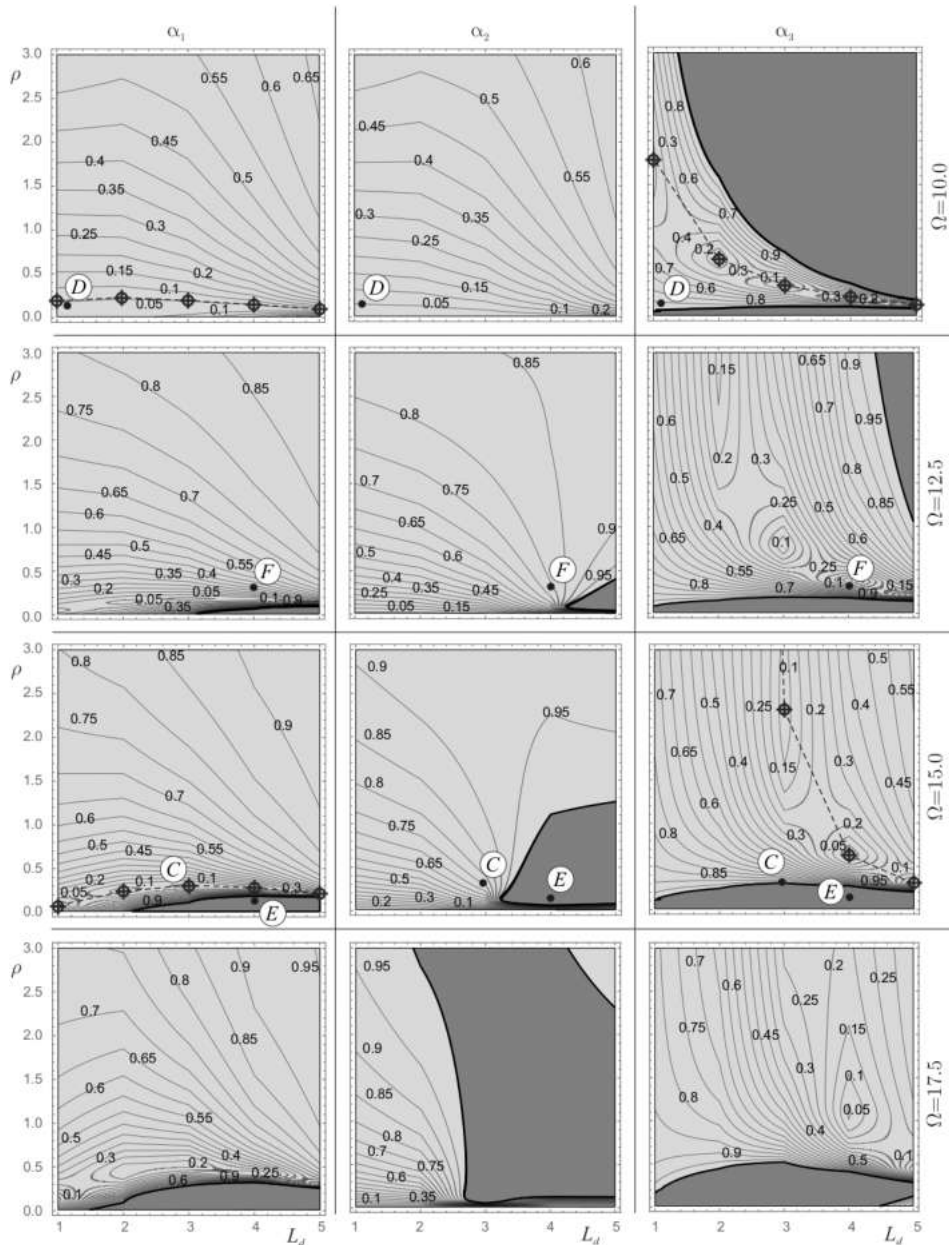
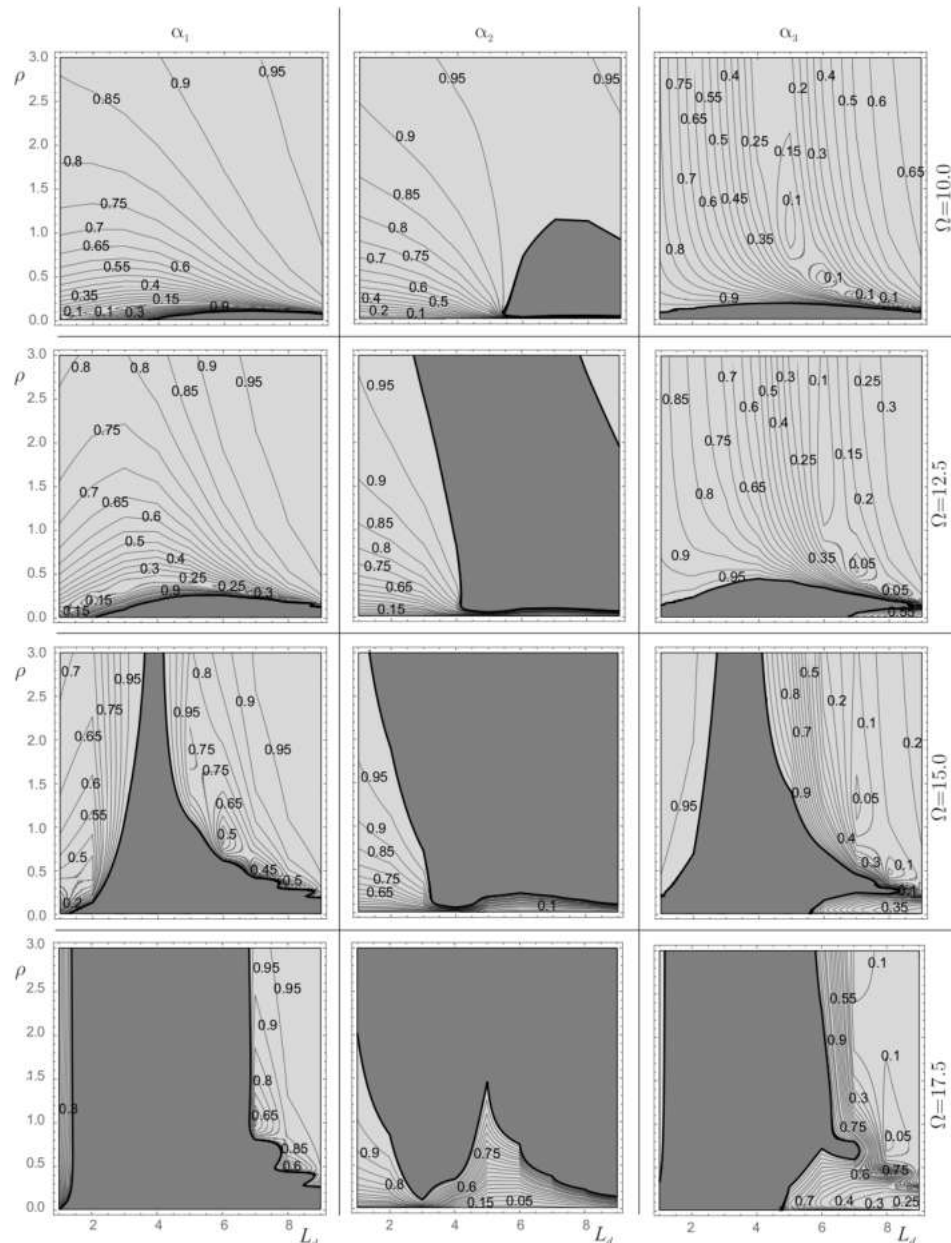


Fig. 2.7: Mappe armoniche ottenute per un modello archetipo che rappresenta un telaio a sei piani.

in [5, 6]. In Fig. 2.9 i risultati sono organizzati in righe. Ognuna di queste si riferisce ad uno dei quattro punti indicati dalle lettere C, D, E ed F di Fig. 2.7: In particolare, gli schemi a sinistra e al centro di ogni riga mostrano la frequenza  $\omega$  e la forma (indicata dalle frecce) del modo fondamentale del modello ausiliario A e del modello principale. Il grafico a destra mostra le storie temporali degli spostamenti del modello principale  $u_1, u_d$  and  $u_2$ .

La prima riga di Fig. 2.9 si riferisce al punto C di Fig. 2.7. Tale punto è localizzato su un punto di minimo relativo della mappa  $\alpha_1$ , con una frequenza dell'eccitazione armonica  $\Omega = 15$ . Le coordinate del punto C ( $L_d = 3, \rho = 0.31$ ) rappresentano i parametri della discontinuità per i quali



**Fig. 2.8:** Mappe armoniche ottenute per un modello archetipo che rappresenta un telaio a dieci piani.

il funzionamento come TMD della sovrastruttura rispetto alla sottostruttura è ottimizzato. In particolare le storie temporali di Fig. 2.9c mostrano che gli spostamenti della sovrastruttura ( $u_2$ ) e della sottostruttura ( $u_1$ ) non sono in fase, ma vi è un certo ritardo di fase tra loro. Infatti, quando la sottostruttura raggiunge il suo valore minimo, la sovrastruttura si muove sul lato opposto.

La seconda riga di Fig. 2.9 si riferisce al punto D di Fig. 2.7. Il punto D è un punto di minimo nella mappa di  $\alpha_2$  con  $\Omega = 10$ . Le coordinate di D ( $L_d = 1$ ,  $\rho = 0.1$ ) rappresentano i parametri della discontinuità per i quali viene messo in risalto il funzionamento come BI. Si osserva che la discontinuità spo-

sta il periodo fondamentale del modello principale Fig. 2.9e lontano dalla frequenza dell'eccitazione, consentendo una riduzione degli spostamenti rispetto a quelli del modello ausiliario. Infatti, poiché la frequenza modale del modello ausiliario è molto vicina a quella dell'eccitazione (Fig. 2.9d), i suoi spostamenti sono più elevati di quello del modello principale. Lo spostamento delle frequenze nel sistema principale è dovuto principalmente a due fattori. Il primo è collegato alla diminuzione della rigidezza nel piano di discontinuità, il secondo invece è dovuto al leggero incremento della massa totale dovuto alla presenza degli irrigidimenti di massa  $m_0$ . In generale si osserva un comportamento tipico a base isolata (si vedano le storie temporali in Fig. 2.9f) dove tutti i tre gradi di libertà si muovono in fase.

La terza riga di Fig. 2.9 si riferisce al punto E di Fig. 2.7. Tale punto è localizzato dove  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  hanno valori superiori all'unità. Le coordinate di E ( $L_d = 4$ ,  $\rho = 0.12$ ) non sono buoni parametri di progetto, in quanto una discontinuità progettata con questi parametri non è capace di ridurre gli spostamenti del telaio. Questo comportamento è principalmente dovuto al fatto che la frequenza del secondo modo del modello principale (Fig. 2.9h) è molto vicina alla frequenza dell'eccitazione esterna. Poiché la frequenza del modo del modello ausiliario (Fig. 2.9g) è lontana da quella dell'eccitazione armonica, gli spostamenti di quest'ultimo sono inferiori a quelli del modello principale, restituendo così valori dei coefficienti di guadagno superiori all'unità.

Infine, la quarta riga di Fig. 2.9 si riferisce al punto F di Fig. 2.7. Tale punto è un punto di minimo relativo nella mappa  $\alpha_3$  quando la frequenza dell'eccitazione armonica è  $\Omega = 12.5$ . Le coordinate di F ( $L_d = 4$ ,  $\rho = 0.38$ ) rappresentano i parametri per i quali l'effetto filtrante della sottostruttura sull'eccitazione esterna ha effetti positivi sullo spostamento del piano di isolamento. Questo si verifica poiché la frequenza del modello ausiliario B (Fig. 2.9j) è vicina alla frequenza dell'eccitazione esterna. Poiché la frequenza del modello principale (Fig. 2.9k) è lontana dalla condizione di risonanza, lo spostamento del modello principale è più piccolo di quello del modello ausiliario B.

### **2.3.5 Validità del modello archetipo**

Per poter confrontare i risultati dei modelli M-GDL con quelli ottenuti dai modelli archetipi, si introducono tre coefficienti di guadagno speculari a quelli descritti in Eq. (2.19). Comunque, gli spostamenti usati in queste nuove definizioni di coefficienti di guadagno sono quelli dei modelli M-GDL. I

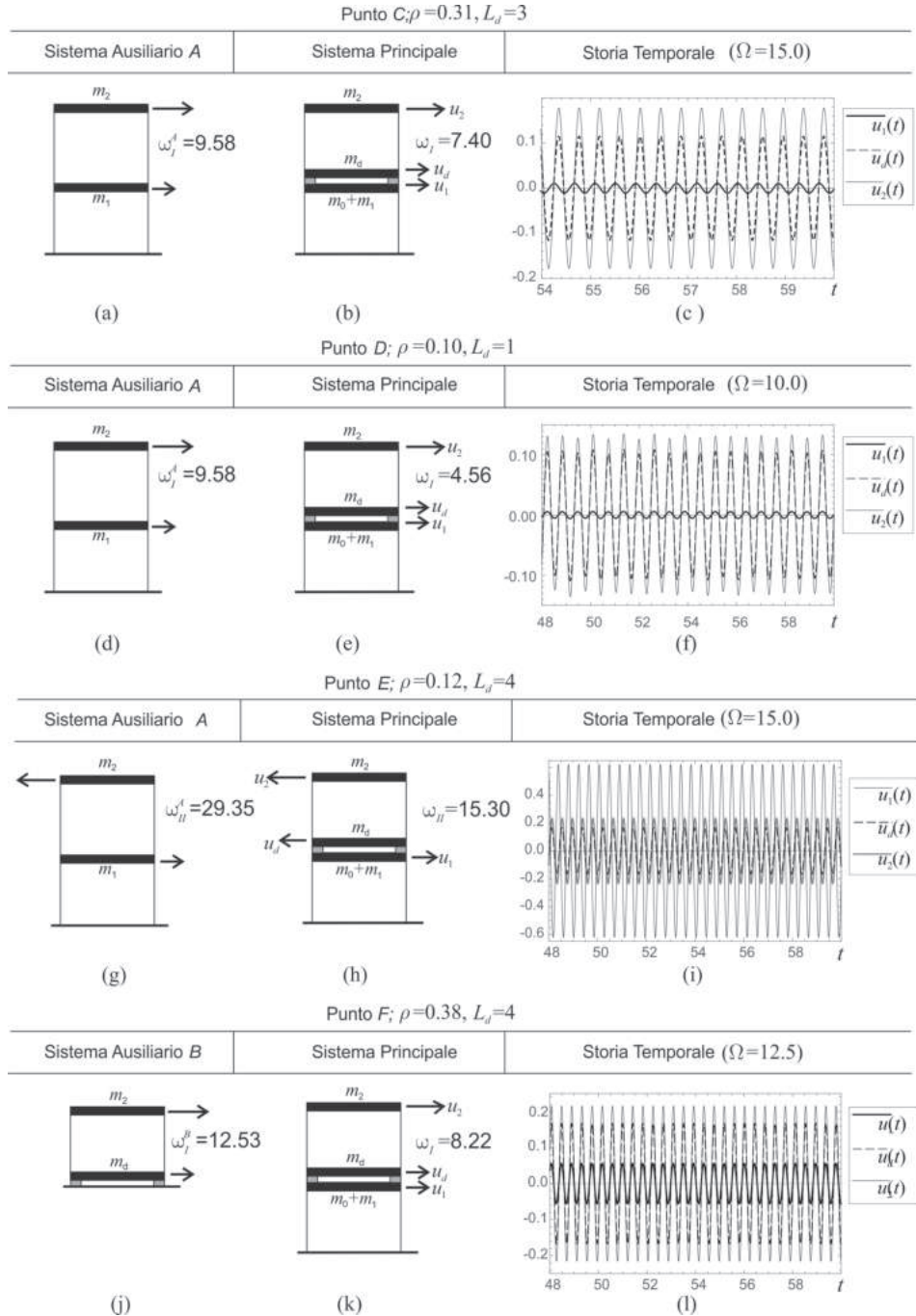


Fig. 2.9: Analisi modale e storie temporali.

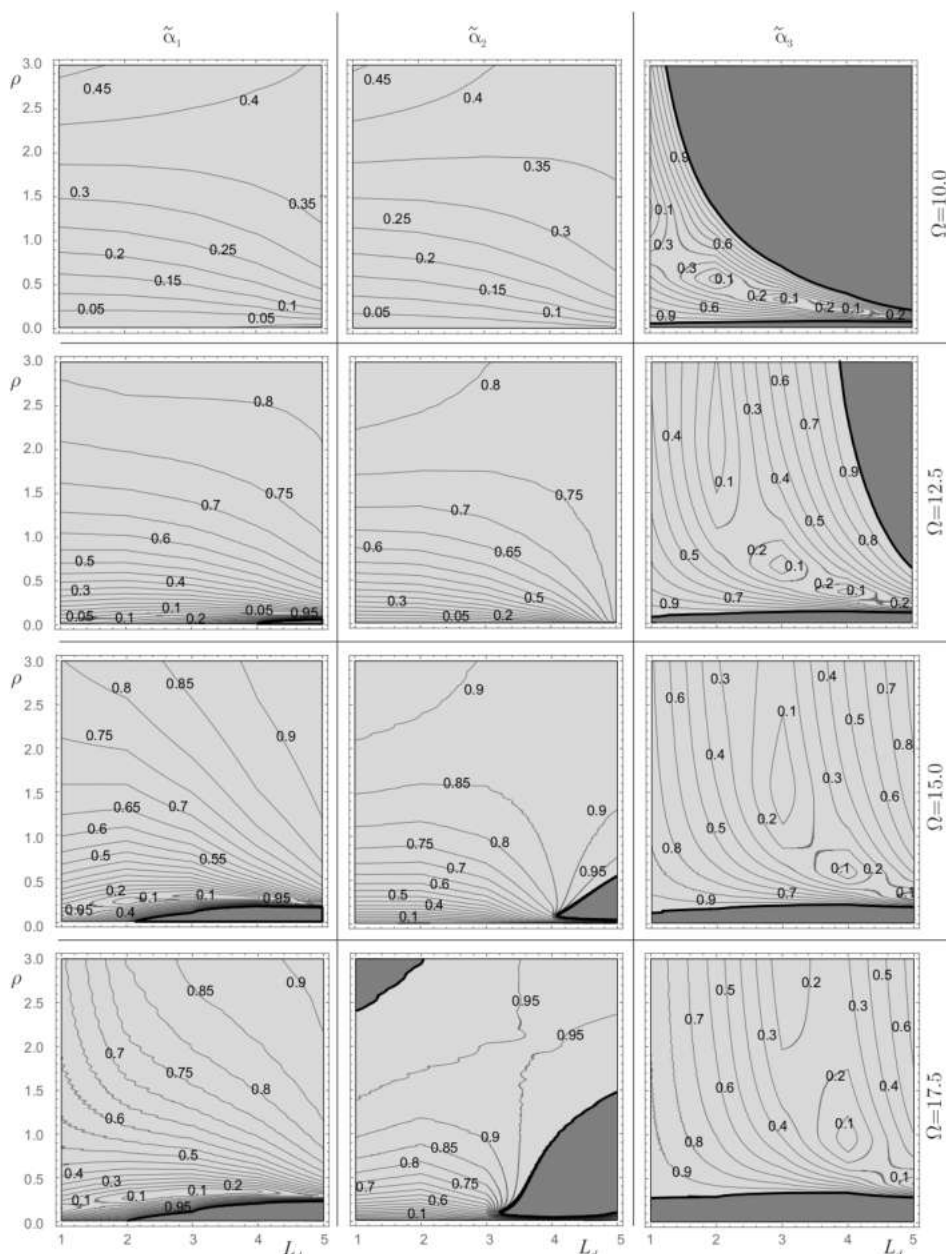
tre coefficienti sono:

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\max[\tilde{u}_{L_d}(t)]}{\max[\tilde{u}_{L_d}^A(t)]}; \tilde{\alpha}_2 = \frac{\max[\tilde{u}_{N+1}(t) - \tilde{u}_{L_d+1}(t)]}{\max[\tilde{u}_N^A - \tilde{u}_{L_d}^A(t)]}; \tilde{\alpha}_3 = \frac{\max[\tilde{u}_{L_d+1}(t) - \tilde{u}_{L_d}(t)]}{\max[\tilde{u}_{L_d+1}^B(t)]} \quad (2.24)$$

Le mappe di guadagno associate ai coefficienti dell'Eq. (2.24) hanno significato solo lungo le linee verticali passanti per valori interi dell'asse orizzontale e sono ottenute per interpolazione lineare tra i valori lungo ta-

li linee verticali. E' utilizzata la stessa convenzione delle mappe ottenute dai modelli archetipi dove il colore chiaro indica un miglioramento delle prestazioni del sistema mentre il colore scuro indica un aumento dello spostamento a seguito dell'introduzione della discontinuità.

Nella Fig. 2.10 sono riportate le mappe di guadagno per un telaio shear-type a sei piani, le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono riportate nella prima riga della Tab. 2.1.



**Fig. 2.10:** Mappe armoniche ottenute per un telaio shear-type a sei piani.

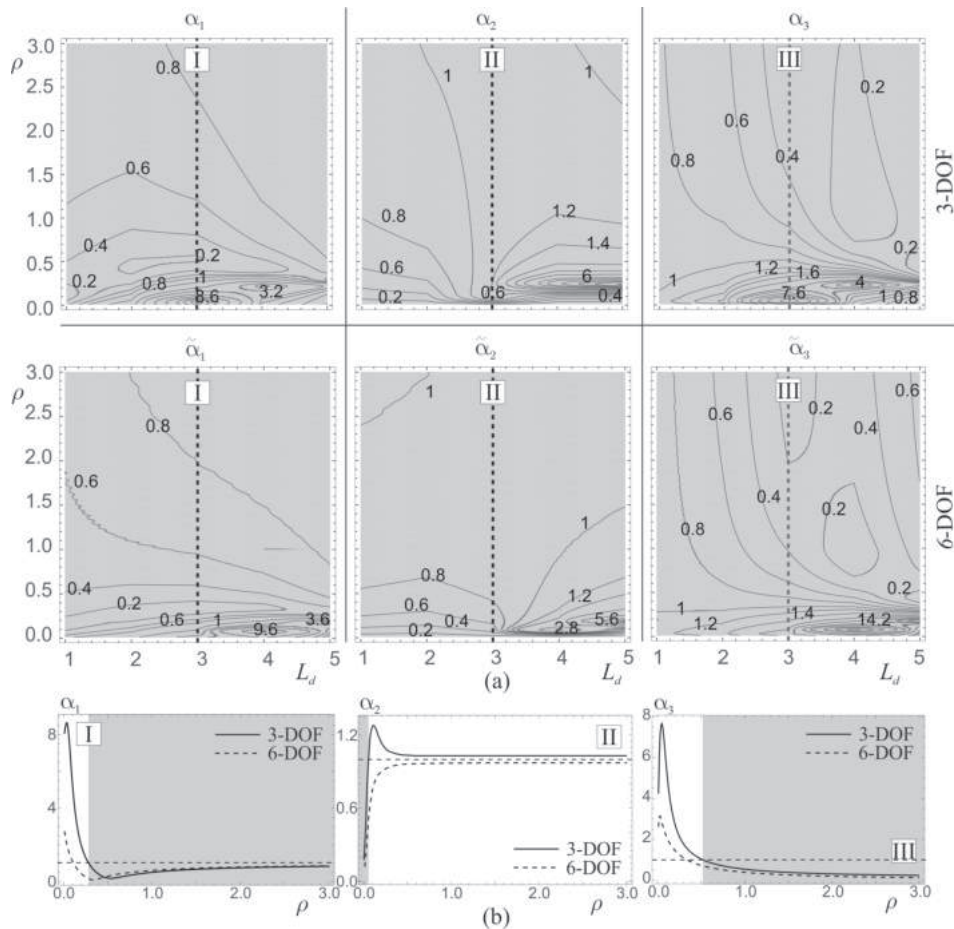
Sebbene l'estensione delle regioni di guadagno sembra molto diversa tra le mappe  $\alpha_2$  (terza e quarta riga di Fig. 2.7 e Fig. 2.10), la differenza reale tra le due mappe è molto limitata. In riferimento alle mappe  $\alpha_2$  nella

quarta riga ( $\Omega = 17.5$ ) di Fig. 2.7 e Fig. 2.10, la regione di guadagno del modello M-GDL è molto più larga della regione di guadagno del modello archetipo. Comunque, nelle regioni grigio scuro della mappa  $\alpha_2$  del modello archetipo (Fig. 2.7) i valori di  $\alpha_2$  sono di poco maggiori dell'unità. Nelle regioni corrispondenti di Fig. 2.10 i coefficienti sono di poco inferiori all'unità. Quindi le differenze tra le regioni di guadagno sono relative alle piccole differenze tra i coefficienti.

Nella Fig. 2.11a sono riportate le mappe del modello archetipo (prima riga) e del modello M-GDL (seconda riga) in modo da poter verificare le similitudini tra di esse. Nello specifico si sono riportate le mappe riferite ad una frequenza dell'eccitazione esterna  $\Omega = 17.5$  dove le curve di livello sono estese all'intero piano dei parametri, senza distinguere le regioni di guadagno dalle altre. Si osserva che nelle regioni dove i coefficienti sono minori dell'unità sia il modello archetipo che il modello M-GDL forniscono informazioni simili. Le sezioni di queste mappe (Fig. 2.11b) lungo i percorsi I, II e III confermano un buon riscontro tra i risultati del modello 3-GDL e quello M-GDL. In generale, i risultati del modello archetipo sono sempre a favore di sicurezza, in quanto sovrastimano il coefficiente di guadagno. Inoltre, nelle regioni di guadagno, i coefficienti  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  ottenuti da un modello archetipo sono molto vicini a quelli ottenuti dal modello M-GDL. Questo aspetto può essere visto sia confrontando le mappe che le loro sezioni (sezione I e II di Fig. 2.11b).

## 2.4 Analisi sismica

In questa sezione si investiga la capacità della discontinuità a mitigare la risposta sismica di una struttura intelaiata. In particolare in questa sezione vengono considerati gli effetti della discontinuità su un telaio spaziale. Un'importante parte dell'analisi è quindi indirizzata a verificare la capacità del modello archetipo di rappresentare un telaio spaziale. Dopodiché, le analisi parametriche vengono svolte sul modello archetipo. Differentemente da [61] dove lo studio si concentra sull'effetto di accoppiamento dei modi, in questa tesi si svolgono analisi parametriche su di un ampio intervallo di parametri in modo da determinare la migliore combinazione dei parametri di progetto che consentono la massima riduzione degli spostamenti della struttura. Inoltre, per tenere conto del valore più elevato di smorzamento in corrispondenza del piano di isolamento rispetto al resto della struttura, la matrice di smorzamento viene calcolata attraverso una procedura non classica ([29, 62]). I risultati delle analisi, riportati in termi-



**Fig. 2.11:** Mappe armoniche: (a) Confronto delle mappe per modelli 3-GDL e M-GDL; (b) Confronto tra le sezioni delle mappe lungo i percorsi I,II e III.

ni di coefficienti di guadagno (vedere sezione 2.3.2), sono organizzati in mappe riferite a singoli registrazioni sismiche. Nell'ultima parte tali mappe sono invece determinate in funzione dello spettro di progetto, avvalendosi delle proprietà di spettro-compatibilità.

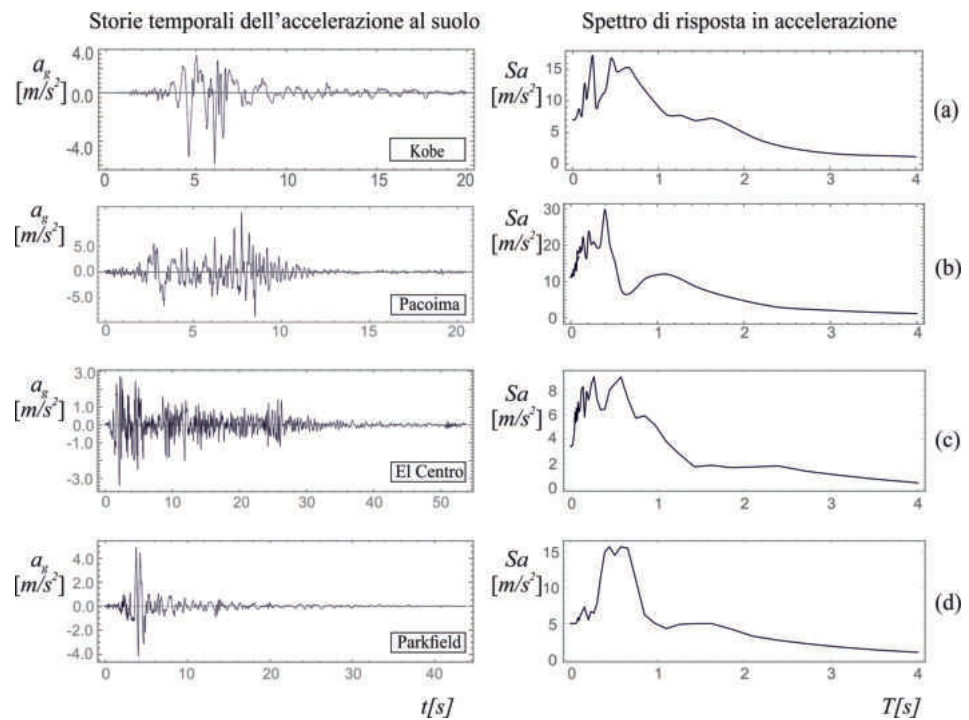
#### 2.4.0.1 Eccitazione Sismica

Quattro differenti registrazioni di eccitazioni sismiche sono state utilizzate nelle simulazioni:

- (a) Kobe, Takarazuka-000 station, ground motion recorded during the 1995 Japan Earthquake.
- (b) Pacoima, Dam-164 ground motion recorded during the 1971 San Fernando, California earthquake.
- (c) El Centro, CA - Array Sta 9 - Imperial Valley Irrigation District - 302 Commercial (component 180), 1979.

(d) Parkfield, CO2-065 ground motion recorded during the California earthquake 1966.

Da qui in avanti, ogni terremoto sarà chiamato utilizzando il nome sottolineato. Queste registrazioni sono state scelte in quanto hanno spettri differenti. Le storie temporali e gli spettri in accelerazione sono mostrati in Fig. 2.12.



**Fig. 2.12:** Storie temporali e spettri in accelerazioni delle registrazioni sismiche di: (a) Kobe; (b) Pacoima; (c) El Centro; (d) Parkfield.

Inoltre, differenti set di registrazioni sismiche sono stati utilizzati per svolgere analisi che tengono conto del criterio di spettro-compatibilità. In particolare, due differenti set di registrazioni sismiche (vedere Tab. A.1 e Tab. A.2 in appendice A.2). Gli spettri di progetto scelti sono relativi allo stato limite di salvaguardia della vita (SLV) ed è basato su una probabilità di eccedenza del 10% in 50 anni, la quale è equivalente ad un periodo di ritorno di 475 anni. Lo spettro di progetto è riferito ad una classe di suolo A ed ad una categoria topografica T1, (definizioni dell'ISC<sup>5</sup>). Il criterio di spettro compatibilità prevede che, per ogni periodo in un intervallo specifico, la media dei valori delle ordinate spettrali ottenute da un gruppo di almeno sette registrazioni sismiche non deve essere inferiore al 10% dello spettro di progetto.

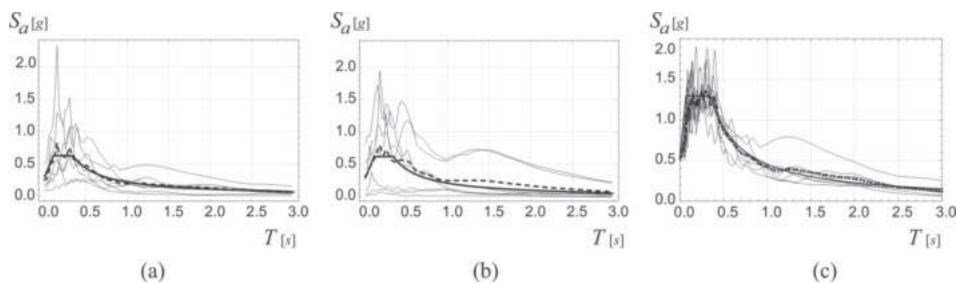
L'ultimo set di registrazioni, relativo allo spettro di progetto di Los Angeles (in accordo ai codici ASCE7-10), è riportato nella Tab. A.3 dell'appendi-

<sup>5</sup>International Seismological Centre

ce A.2. Lo spettro di risposta è valutato per una categoria di rischio *III* ed una classe di suolo A. I parametri di progetto sono  $T_L = 8s$ ,  $S_s(g) = 2.432g$  e  $S_1 = 0.853$ .

Ogni set di registrazioni è stato selezionato usando il software Rexel [85]. In aggiunta ai parametri indicati precedentemente (periodo di ritorno, classe di sito, ecc.), la selezione è stata svolta considerando anche particolari intervalli di magnitudo e distanza epicentrale, consistenti con il rischio sismico dello specifico sito. Inoltre, nel caso dello spettro di progetto di l'Aquila, sono stati ottenuti due differenti set di segnali che non condividono alcun evento sismico. Tuttavia, all'interno di un set vi sono più registrazioni relative allo stesso terremoto ma in stazioni differenti.

Fig. 2.13 mostra gli spettri riferiti ai tre set di registrazioni ed in particolare gli spettri delle singole registrazioni (linee sottili), lo spettro target (linea spessa) e lo spettro medio dell'intero set (linea spessa tratteggiata).



**Fig. 2.13:** Spettri di: (a) Set 1 (L'Aquila); (b) Set 2 (L'Aquila); (c) Set 3 (Los Angeles) (Le linee tratteggiate, spesse e sottili indicano, rispettivamente, lo spettro medio, lo spettro di progetto e lo spettro della singola registrazione).

## 2.4.1 Il modello meccanico e le equazioni del moto

### 2.4.1.1 Il modello archetipo

Il modello archetipo (Fig. 2.1b) consiste di tre parti: (i) la sottostruttura, la quale è definita da una massa  $m_1$ , una rigidezza  $k_1$ , uno smorzamento  $\zeta_{sub}$ ; (ii) la sovrastruttura la quale è definita da una massa  $m_2$ , una rigidezza  $k_2$ , un rapporto di smorzamento  $\zeta_{sup}$ ; (iii) la discontinuità, la quale è definita da una massa  $m_d$ , una rigidezza  $k_d$  e un rapporto di smorzamento  $\zeta_d$ . Le componenti di spostamento sono  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  e  $u_d(t)$ . Sebbene formalmente le equazioni del moto sono simili a quelle descritte nella sezione 2.3.1.1, esse tengono conto del fatto che la matrice  $\mathbf{C}$  è determinata attraverso la procedura di Rayleigh per lo smorzamento non classico. Nello specifico:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{r}a_g(t) \quad (2.25)$$

dove:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_d & -k_d & 0 \\ -k_d & k_d + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_d \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

e dove  $a_g(t)$  è l'accelerazione alla base. In questa sezione per l'accelerazione alla base sono considerate registrazioni di terremoti. Il vettore  $\mathbf{r}$  è il vettore di trascinamento dove tutti i termini sono uguali all'unità. Il comportamento costitutivo della discontinuità è definito da un'equazione lineare. La linearità del legame costitutivo degli isolatori potrebbe quindi essere una limitazione per la capacità descrittiva del modello qualora l'eccitazione alla base conduca i dispositivi di isolamento fuori dall'intervallo di linearità. Tuttavia, alcuni studi condotti su shaker a larga scala hanno mostrato che il loro comportamento può essere modellato, in prima approssimazione, da un modello lineare viscoelastico [28].

La sottostruttura e la sovrastruttura sono assunte avere rapporti di smorzamento  $\zeta_{sub} = \zeta_{sup} = \zeta_s = 0.05$ , dove il piano di discontinuità ha un rapporto di smorzamento variabile ( $\zeta_d \geq 0.05$ ). Poiché si assumono differenti rapporti di smorzamento per la discontinuità, allora è necessario utilizzare il modello non classico di smorzamento alla Rayleigh. La procedura per costruire la matrice  $\mathbf{C}$  è descritta in [29, 62]. La struttura interna delle matrici di massa, rigidezza e smorzamento di un telaio con discontinuità intermedia è mostrata in Fig. 2.14.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{sub} & & \\ & \mathbf{M}_d & \\ & & \mathbf{M}_{sup} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{sub} & & \\ & \mathbf{K}_d & \\ & & \mathbf{K}_{sup} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{sub} & & \\ & \mathbf{C}_d & \\ & & \mathbf{C}_{sup} \end{bmatrix}$$

**Fig. 2.14:** Struttura interna delle matrici di massa, rigidezza e smorzamento.

Le sotto-matrici di massa e rigidezza del modello archetipo di Fig. 2.14 sono:

$$\mathbf{M}_{sub} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{sup} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_{sub} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K}_{sup} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Le sotto-matrici di smorzamento sono ottenute da

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{sub} &= \alpha_{sub}\mathbf{M}_{sub} + \beta_{sub}\mathbf{K}_{sub} \\ \mathbf{C}_d &= \alpha_d\mathbf{M}_d + \beta_d\mathbf{K}_d \\ \mathbf{C}_{sup} &= \alpha_{sup}\mathbf{M}_{sup} + \beta_{sup}\mathbf{K}_{sup} \end{aligned} \quad (2.28)$$

La matrice di smorzamento risultante è assemblata in maniera simile alla matrice di rigidezza, come mostrato in Fig. 2.14. I coefficienti di Rayleigh  $\alpha$  e  $\beta$  nella Eq. (2.28) sono definiti nel seguente modo:

$$\{\alpha_{sub,sup}; \beta_{sub,sup}\} = \left\{ \frac{2\omega_i\omega_j\zeta_{sub,sup}}{\omega_i + \omega_j}; \frac{2\zeta_{sub,sup}}{\omega_i + \omega_j} \right\} \quad (2.29)$$

$$\{\alpha_d; \beta_d\} = \left\{ \frac{2\omega_i\omega_j\zeta_d}{\omega_i + \omega_j}; \frac{2\zeta_d}{\omega_i + \omega_j} \right\} \quad (2.30)$$

dove  $\omega_i$  e  $\omega_j$  rappresentano le pulsazioni caratteristiche dei due modi del sistema. Per il modello archetipo del sistema principale si assume che  $\omega_i = \omega_1$  e  $\omega_j = \omega_2$ , dove  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sono le prime due frequenze circolari. La matrice di damping risultante non è proporzionale, pertanto la sua proiezione nella base modale risulta una matrice non diagonale. Ci sono diversi metodi per risolvere queste equazioni. Il metodo più semplice consiste nel proiettare la matrice nella base modale ed ignorare i termini fuori dalla diagonale principale. Questa semplificazione può condurre ad errori, come mostrato in [71]. Un altro metodo è presentato in [72], dove gli autori hanno introdotto un nuovo metodo per l'analisi modale di strutture con damping non classico. Questo metodo definisce i modi generalizzati nello spazio di stato e usa variabili di stato differenziali per decomporre le risposte modali. Invece, nel caso di analisi modale con spettro di risposta, [73] introduce una procedura dove un metodo modale complesso viene utilizzato per studiare strutture con smorzamento non classico. Tale metodo considera i contributi dei modi di vibrazioni più elevati e incrementa la precisione sulla predizione della risposta strutturale. In questa tesi, i risultati numerici sono ottenuti per integrazione diretta delle equazioni del moto Eq. (2.25), come suggerito da [29]. Pertanto non viene introdotta alcuna semplificazione. I modelli ausiliari sono gli stessi definiti nella sezione 2.3.1.1 e pertanto non vengono qui ripetuti.

#### **2.4.1.2 Il telaio spaziale M-GDL**

Il telaio M-GDL è modellato come un telaio shear-type. Ogni piano del telaio è considerato rigido nel suo proprio piano e di conseguenza ogni pia-

no ha tre gradi di libertà: due spostamenti ed una rotazione. La discontinuità aggiunge un piano virtuale al telaio in termini di gradi di libertà, infatti il telaio ha  $3 \cdot (N + 1)$  gradi di libertà, dove  $N$  è il numero di piani utilizzabili. Si assume che il centro di massa  $G_i$   $i = 1, \dots, N + 1$  di ogni piano coincida con il suo centro geometrico (Fig. 2.15). Le caratteristiche geometriche del telaio restano uguali su tutti i piani. Le matrici di massa e rigidezza del sistema principale hanno dimensioni  $3 \cdot (N + 1) \times 3 \cdot (N + 1)$ . Nello specifico la matrice di massa  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & m_y & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & m_\theta & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & m_{dx} & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & m_{dy} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & m_{d\theta} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & Sym & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & m_x & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & m_y & 0 \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & m_\theta \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

dove i termini  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_\theta$  rappresentano le masse traslazionali e rotazionali di ogni piano del telaio e  $m_{dx}$ ,  $m_{dy}$  e  $m_{d\theta}$  sono le masse traslazionali e rotazionali del piano  $L_d$  sotto la discontinuità (Fig. 2.15). Si assume che  $m_x = m_y = m_p$  e  $m_\theta = m_p(l_x^2 + l_y^2)/12$ , dove  $m_p$  è la massa di un unico piano. Invece,  $m_{dx} = m_{dy} = \gamma_s m_p$  e  $m_{d\theta} = \gamma_s m_p(l_x^2 + l_y^2)/12$ , con  $\gamma_s = 0.5$ . Il coefficiente  $\gamma_s$ , come già spiegato nella sezione precedente, è stato introdotto per tenere conto che il piano sotto la discontinuità non è un vero piano. Infatti  $\gamma_s$  è definito dal rapporto tra la massa degli irrigidimenti (SF in Fig.2.1) e la massa di piano.

La struttura interna della matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  è

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_{1,2} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{K}_2 & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \vdots & \mathbf{K}_{L_d} & \mathbf{K}_{L_d, L_d+1} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \vdots & & \mathbf{K}_{L_d+1} & \vdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & Sym & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ & & \vdots & & & \vdots & \mathbf{K}_{n_p} & \mathbf{K}_{N, N+1} \\ & & \vdots & & & \vdots & & \mathbf{K}_{N+1} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

dove le sotto-matrici  $\mathbf{K}_i$  e  $\mathbf{K}_{j,j+1}$  sono

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 2K_x & 0 & 2K_{x\theta} \\ 0 & 2K_y & 2K_{y\theta} \\ 2K_{x\theta} & 2K_{y\theta} & 2K_\theta \end{bmatrix}, \quad (i = 1, \dots, N+1), \quad (i \neq L_d, L_d+1)$$

$$\mathbf{K}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} -K_x & 0 & -K_{x\theta} \\ 0 & -K_y & -K_{y\theta} \\ -K_{x\theta} & -K_{y\theta} & -K_\theta \end{bmatrix}, \quad (j = 1, \dots, N), \quad (j \neq L_d) \quad (2.33)$$

Le rigidezze  $K_x = \sum_{n=1}^{n_c} 12 \cdot EI_{x,n} / l_p^3$  e  $K_y = \sum_{n=1}^{n_c} 12 \cdot EI_{y,n} / l_p^3$  sono le rigidezze totali nelle direzioni  $x$  e  $y$ , dove  $n_c$  è il numero di colonne del telaio. Il termine  $K_\theta = \sum_{n=1}^{n_c} 12 \cdot EI_{x,n} / l_p^3 \cdot yc_n^2 + \sum_{n=1}^{n_c} 12 \cdot EI_{y,n} / l_p^3 \cdot xc_n^2$  rappresenta la rigidezza torsionale del telaio e  $xc_n$  e  $yc_n$  sono le posizioni dell'  $n$ -sima colonna valutata rispetto ai telai di riferimento ad ogni piano. Infine, i termini fuori diagonale dipendono dalla posizione del centro di rigidezza. Infatti,  $K_{x\theta} = -K_x \cdot Y_F$  e  $K_{y\theta} = K_y \cdot X_F$ , dove  $X_F$  e  $Y_F$  sono le coordinate del centro di rigidezza. Se il telaio non ha eccentricità, allora questi termini scompaiono.

Le sotto-matrici relative al piano di discontinuità sono

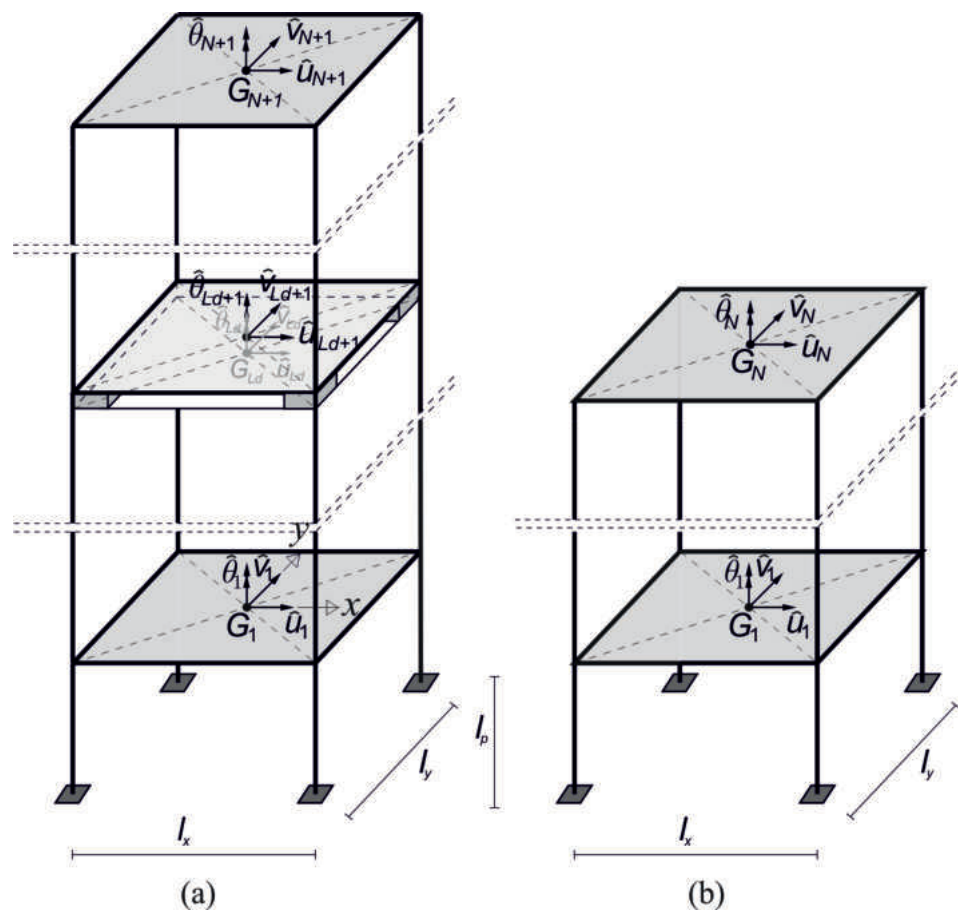
$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} K_x + K_{dx} & 0 & K_{x\theta} + K_{dx\theta} \\ 0 & K_y + K_{dy} & K_{y\theta} + K_{dy\theta} \\ K_{x\theta} + K_{dx\theta} & K_{y\theta} + K_{dy\theta} & K_\theta + K_{d\theta} \end{bmatrix}, \quad (i = L_d, L_d+1)$$

$$\mathbf{K}_{j,j+1} = \begin{bmatrix} -K_{dx} & 0 & -K_{dx\theta} \\ 0 & -K_{dy} & -K_{dy\theta} \\ -K_{dx\theta} & -K_{dy\theta} & -K_{d\theta} \end{bmatrix}, \quad (j = L_d) \quad (2.34)$$

dove

$$K_{dx} = \rho K_x \quad K_{dy} = \rho K_y \quad K_{d\theta} = \rho K_\theta \quad (2.35)$$

dove  $\rho$  è un parametro variabile adimensionale del sistema. Infine,  $K_{dx\theta} = -K_{dx} \cdot Y_D$  e  $K_{dy\theta} = K_{dy} \cdot X_D$ , dove  $X_D$  e  $Y_D$  sono le coordinate del centro di rigidezza del piano di discontinuità. Il centro di rigidezza del piano di discontinuità può essere diverso dal centro di rigidezza del generico piano ( $X_D \neq X_F$  e/o  $Y_D \neq Y_F$ ). La discontinuità ha un rapporto di smorzamento  $\xi_d$  che può essere molto diverso dal rapporto di smorzamento della struttura  $\xi_s$ . Questo implica l'utilizzo del modello non classico di damping di Rayleigh. Lo schema per l'individuazione dei sottosistemi è rappresentato in Fig. 2.14. Per ogni sottosistema, la matrice di smorzamento è valutata usando i coefficienti di Rayleigh forniti dalla procedura classica e assemblando come in Fig. 2.14. Differentemente dal modello archetipo, per il modello M-GDL i valori  $i$  e  $j$  che rappresentano i modi considerati nella formulazione di Rayleigh possono essere differenti. Nello specifico la scelta di  $i$  e  $j$  dipende dalla struttura e sarà spiegata più avanti.



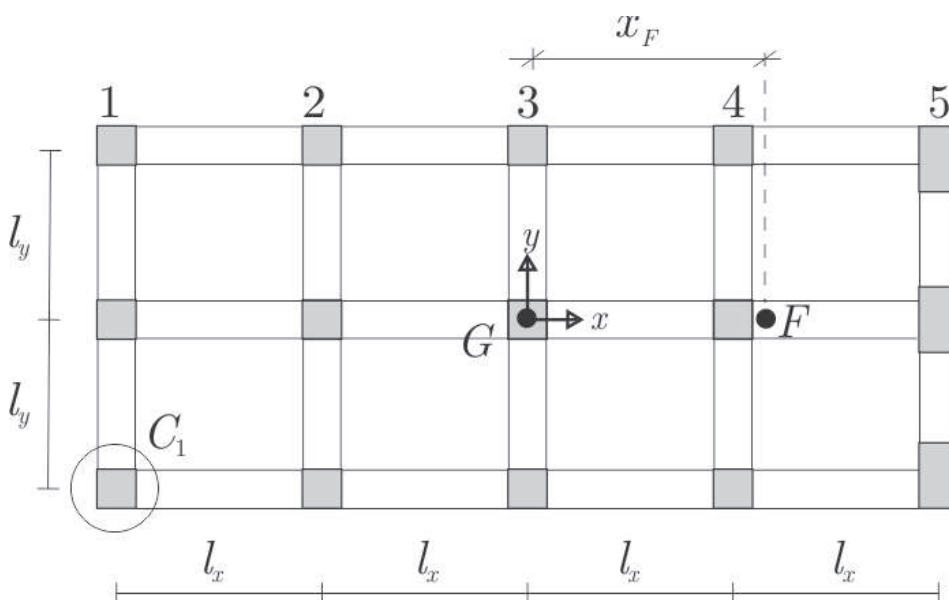
**Fig. 2.15:** Telai M-GDL: (a) Principale (b) Ausiliario A.

Il modello ausiliario A (Fig. 2.15b) è ottenuto adottando un collegamento rigido che connette la sovrastruttura e la sottostruttura. Esso rappresenta il telaio prima dell'inserimento della discontinuità. La matrice di smorzamento è ottenuta attraverso la formulazione classica di Rayleigh, conside-

rando un rapporto di smorzamento  $\zeta_s = 0.05$ . La formulazione delle matrici di massa e rigidezza è simile a quella mostrata per il sistema principale e quindi non viene riportata.

## 2.4.2 Caratteristiche della struttura M-GDL e del modello archetipo 3-GDL

La Fig. 2.16 rappresenta la pianta dell'edificio utilizzato nelle simulazioni. Il telaio ha sei piani, la cui altezza interpiano è  $l_z = 3.00$  m, e le sue dimensioni in pianta sono indicate da  $l_x$  e  $l_y$ , dove  $l_x = 5.00$  m e  $l_y = 6.25$  m. Tutti i piani hanno la medesima superficie ( $250$  m<sup>2</sup>) e la loro massa è  $m_p = 301.5 \times 10^3$  kg. La posizione del centro di rigidezza  $F$  rispetto al centro di massa  $G$  è rappresentato da  $x_F$ . Due diversi valori di  $x_F$  sono considerati: (i)  $x_F = 0$  per il telaio regolare (RF) e (ii)  $x_F = 5.80$  m per il telaio irregolare (IF). Le caratteristiche delle colonne di IF sono riportate in Tab. 2.3 secondo il telaio a cui appartengono. I telai sono identificati in Fig. 2.16 con numeri da 1 a 5 e si riferiscono ai telai allineati nella direzione  $y$ . In RF, le dimensioni delle colonne del telaio 5 sono uguali a quelle dei telai 1-4. Il modulo di Young è  $E = 3 \times 10^7$  KN/m<sup>2</sup>. Si considera un'eccitazione sismica agente lungo la direzione globale  $y$  in quanto è l'unica direzione che può mostrare gli effetti dell'eccentricità.



**Fig. 2.16:** Pianta dell'  $i$ -simo ( $i = 1, \dots, N$ ) piano, posizione del centro di massa ( $G$ ) e del centro di rigidezza ( $F$ ).

Per il telaio si assume  $\zeta_s = 5\%$  mentre per la discontinuità, quando presente, si assume un valore di smorzamento  $\zeta_d = 10\%$ . Il valore  $L_d$  è considerato un parametro variabile delle simulazioni. La procedura per de-

**Tabella 2.3:** Caratteristiche geometriche di IR.

Colonne	Base [m]	Larghezza [m]
Telaio 1-4	0.40	0.60
Telaio 5	0.40	1.20

terminare i parametri equivalenti di un telaio spaziale a M-GDL è riportata in Appendice A.1. Per la struttura in esame, la procedura di equivalenza considera il primo modo in direzione  $y$  come modo di riferimento, il quale ha un fattore di partecipazione  $\mathcal{L}_m = 87\%$  nel caso di RF mentre scende a  $\mathcal{L}_m = 62\%$  per IR. Il telaio di riferimento assunto è quello passante per G. Le caratteristiche meccaniche del modello archetipo sono riportate in Tab. 2.4.

**Tabella 2.4:** Caratteristiche meccaniche del modello archetipo.

$L_d$	Telaio Regolare (RF)		Telaio Irregolare (IF)	
	$m_1$ [kg $\times 10^3$ ]	$m_2$ [kg $\times 10^3$ ]	$k_1$ [kN/m]	$k_2$ [kN/m]
1	150.75	1507,50	602403	182552
2	425.25	1206.00	292175	208839
3	735.75	904.50	207567	250374
4	1055.25	603,00	177681	324132
5	1356.75	301.50	167962	476779

La rigidezza di piano della struttura lungo la direzione  $y$  è  $K_y = 4.76 \times 10^5$  kN/m per RF mentre è  $K_y = 3.45 \times 10^6$  kN/m per IR. Questi valori sono necessari per parametrizzare la rigidezza della discontinuità del modello archetipo  $k_d$  attraverso  $\rho$ :

$$k_d = \rho K_y \quad (2.36)$$

### 2.4.3 Limiti del modello archetipo

Questo paragrafo confronta i risultati del modello archetipo e del modello M-GDL ottenuti da IF per diversi valori di  $L_d = \{1, 3, 5\}$ . Le storie temporali di spostamento  $u_1$  e il drift  $u_2 - u_1$  del modello archetipo sono confrontate con gli spostamenti corrispondenti  $\hat{v}_{L_d}$  e  $\hat{v}_{np+1} - \hat{v}_{L_d+1}$  del modello M-GDL (Fig. 2.15a). In questo caso, il centro di rigidezza del piano di discontinuità coincide con il centro di massa della struttura. Gli smorzamenti associati al telaio ed alla discontinuità sono, rispettivamente,  $\zeta_s = 5\%$  e  $\zeta_d = 10\%$ . I modi  $i$  e  $j$  scelti per la valutazione dei coefficienti di Rayleigh nella Eq. (2.29) e Eq. (2.30)) sono adottati usando il criterio proposto in [62]. Nello specifico, l'  $i$ -simo modo è sempre il primo modo nella direzione  $y$  della struttura; il  $j$ -simo modo è il modo più alto il cui fattore di partecipazione di massa

modale è superiore al 2.5%. Nel caso della struttura in esame risulta  $j = 15$ . Le registrazioni sismiche considerate sono riportate in Fig. 2.12.

Le Fig. 2.17 e 2.18 confrontano le storie temporali del modello archetipo e del modello M-GDL per verificare l'abilità del modello archetipo di descrivere la dinamica del telaio spaziale. Dalle figure si evince che il modello archetipo è in grado di descrivere meglio la risposta quando la discontinuità è applicata ai piani inferiori. Infatti, quando  $L_d = 1$ , il fattore di partecipazione della massa modale associata al modo principale è  $\mathcal{L}_m=0.77$  e diminuisce quando il piano di discontinuità viene spostato ai piani superiori, raggiungendo un valore  $\mathcal{L}_m=0.57$  quando  $L_d = 5$ . Questo vuol dire che l'importanza dei modi superiori aumenta rispetto al modo principale quando la discontinuità viene applicata ai piani superiori dell'edificio. Questo comporta una perdita della capacità descrittiva del modello archetipo, che è in grado di rappresentare correttamente solo il modo principale della struttura. In generale, si osserva che il modello archetipo tende a sovrastimare la risposta. Tale risultato è stato trovato anche in [74].

Questa comparazione è stata svolta considerando un telaio di riferimento (IF del paragrafo 2.4.2). E' interessante anche indagare come l'eccentricità strutturale influenza l'efficienza del modello archetipo e così valutare fin dove è possibile utilizzare tale metodo semplificato per descrivere il comportamento di strutture più complesse. A tal fine si svolge un'analisi parametrica variando l'eccentricità strutturale del telaio e confrontando i risultati ottenuti dal modello archetipo con quelli del modello M-GDL. La differenza percentuale tra il modello M-GDL e quello archetipo è data da:

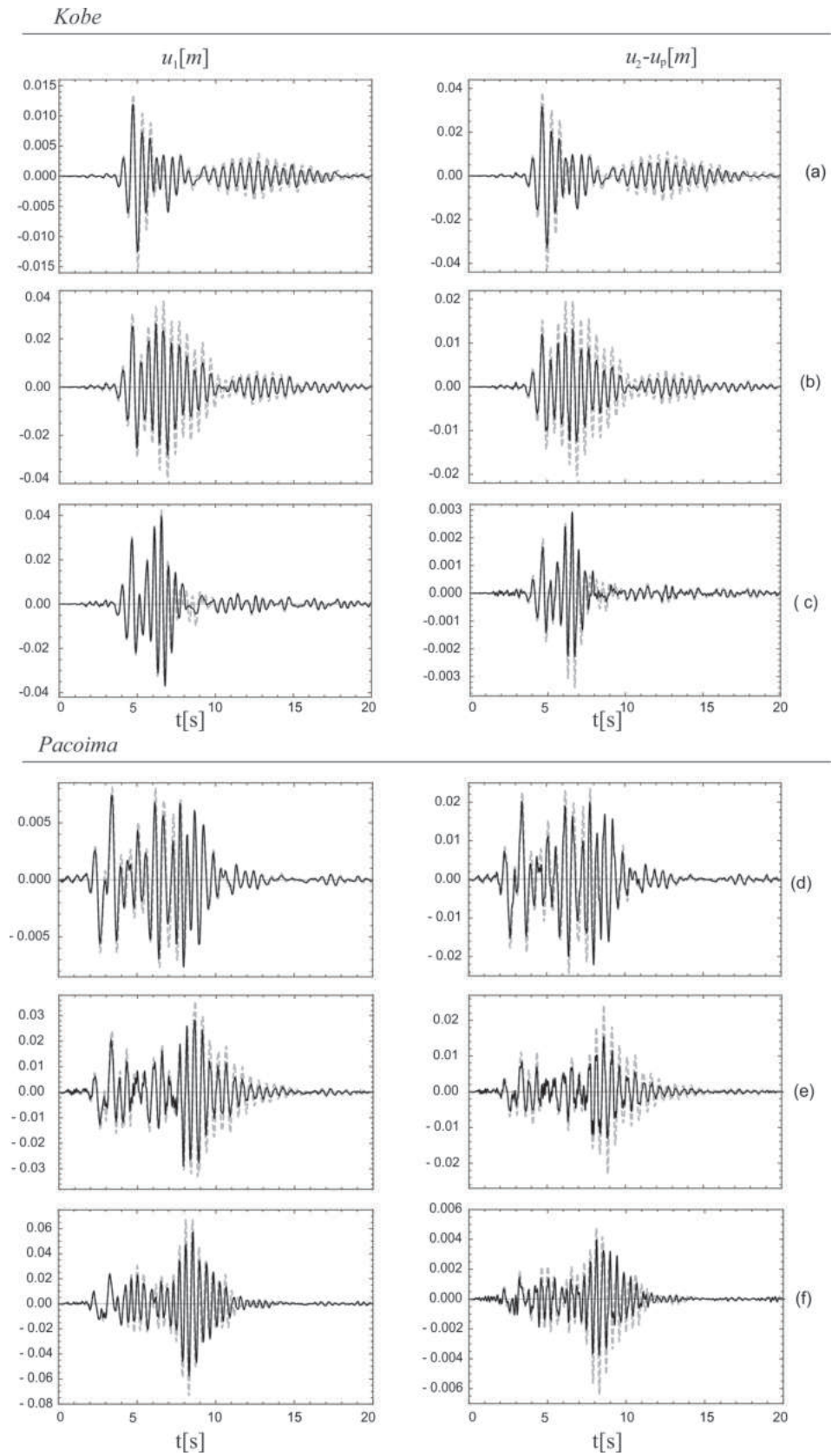
$$\Delta_1 = \frac{\text{Max}|\hat{v}_{L_d} - u_1|}{\text{Max}|\hat{v}_{L_d}|} \times 100; \quad \Delta_2 = \frac{\text{Max}|(\hat{v}_{np+1} - \hat{v}_{L_d+1}) - (u_2 - u_d)|}{\text{Max}|\hat{v}_{np+1} - \hat{v}_{L_d+1}|} \times 100; \quad (2.37)$$

dove  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  sono gli errori del modello archetipo nel rappresentare, rispettivamente, gli spostamenti della sottostruttura e della sovrastruttura del modello M-GDL. L'eccentricità strutturale è definita come

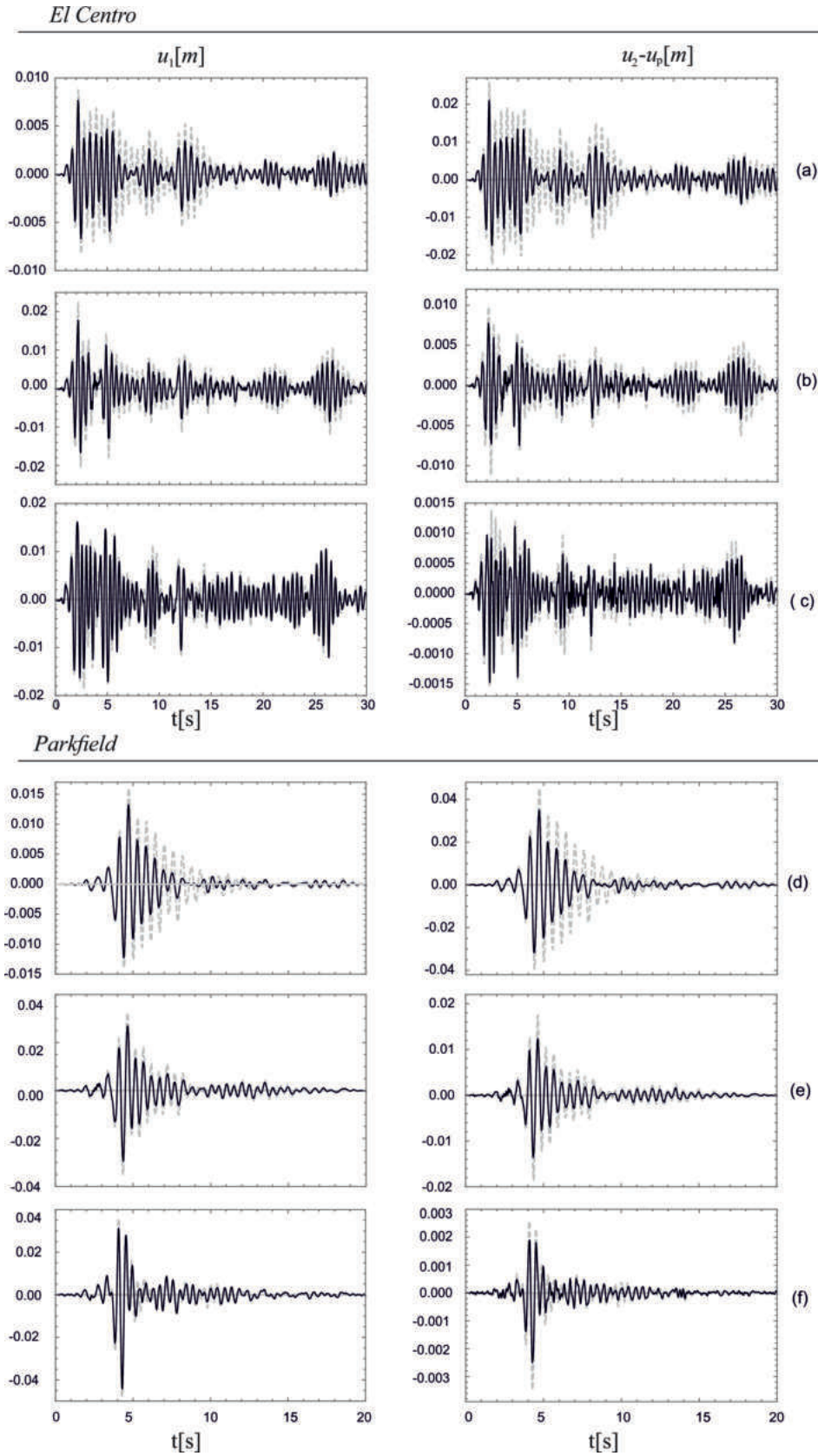
$$e_x = \frac{x_F}{4l_x} \times 100 \quad (2.38)$$

dove  $x_F$  è la posizione del centro di rigidità e  $4l_x$  è la lunghezza totale dell'edificio in direzione  $x$ . L'eccentricità strutturale viene modificata cambiando le dimensioni delle colonne del telaio 5 (Fig. 2.16).

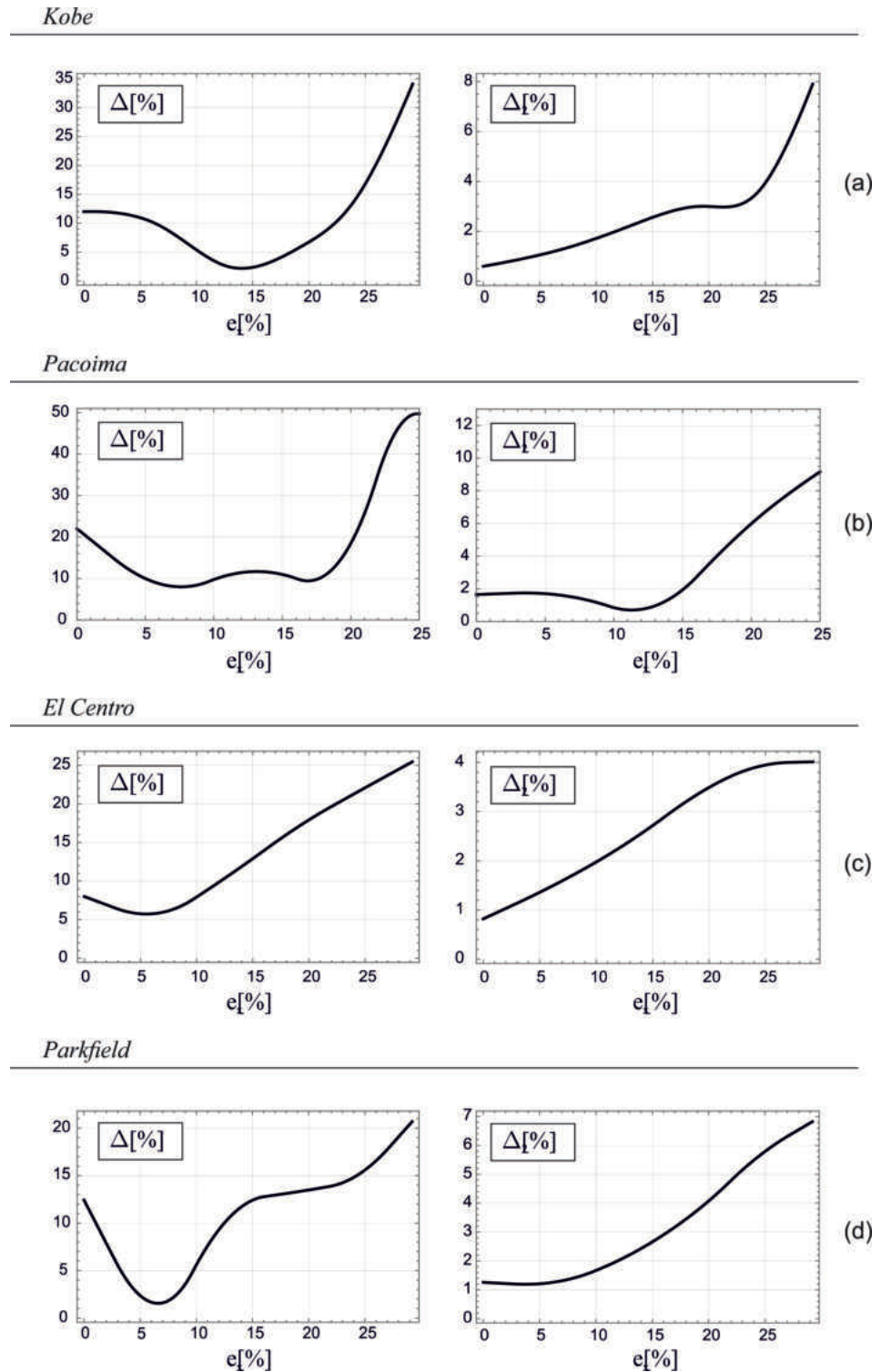
La Fig. 2.19 mostra  $\Delta_i$ , ( $i = 1, 2$ ) come funzioni di  $e_x$  quando quattro differenti registrazioni sismiche sono utilizzate come eccitazione esterna. In



**Fig. 2.17:** Comparazione degli spostamenti del modello archetipo (linea grigia tratteggiata) e del telaio M-GDL (linea solida) per differenti valori di  $L_d$ : (a)-(d)  $L_d = 1$ ; (b)-(e)  $L_d = 3$ ; (c)-(f)  $L_d = 5$ .



**Fig. 2.18:** Comparazione degli spostamenti del modello archetipo (linea grigia tratteggiata) e del telaio M-GDL (linea solida) per differenti valori di  $L_d$ : (a)-(d)  $L_d = 1$ ; (b)-(e)  $L_d = 3$ ; (c)-(f)  $L_d = 5$ .



**Fig. 2.19:** Errore  $\Delta_i$  del modello archetipo in funzione dell'eccentricità strutturale per lo spostamento della sottostruttura (sinistra) e del drift della sovrastruttura (destra) per differenti registrazioni sismiche: (a) Kobe; (b) Pacoima; (c) El Centro; (d) Parkfield.

generale, si osserva un incremento di  $\Delta_i$  quando l'eccentricità strutturale aumenta poiché il fattore di partecipazione del modo principale diminuisce. Tuttavia, la curva di  $\Delta_1$  di Fig. 2.19a ha un punto di minimo in  $e_x = 14\%$ .

Questo si verifica poichè la variazione di eccentricità produce uno spostamento dei periodi dei modi. Infatti quando  $e_x = 14\%$  il modo principale sposta il suo periodo nell'intervallo dei valori massimi delle spettro di Kobe (Fig. 2.12a). Tale punto dipende dall'eccitazione esterna e pertanto le curve  $\Delta_i$  dipendono sia dalle caratteristiche del telaio che dall'eccitazione esterna. Tuttavia, tutte le curve mostrate in Fig. 2.19 hanno uno schema simile. Infatti, nell'intervallo  $0 < e_x < 20\%$ , l'errore del modello archetipo è inferiore al 20%. Al contrario, quando  $e_x > 20\%$ , l'errore aumenta velocemente ed il modello archetipo non può più essere utilizzato.

#### 2.4.4 L'eccentricità del piano di isolamento

La discontinuità rappresenta un'improvvisa variazione di rigidezza all'interno del telaio ed è solitamente realizzata con isolatori sismici, ad esempio isolatori in gomma. Nel caso dell'isolamento alla base, il piano di isolamento è organizzato in maniera tale che il centro di massa della struttura coincida con il centro di rigidezza degli isolatori. Questo fatto assicura che i primi tre modi della struttura isolata siano disaccoppiati l'un altro. Se il piano di isolamento è posizionato ad un livello intermedio, ci sono due possibilità per la distribuzione della rigidezza degli isolatori. Una possibilità consiste nel posizionare gli isolatori come avviene nei sistemi a base isolata, centrando il centro di rigidezza degli isolatori  $F_D$  con il centro di massa  $G$  della struttura. Un'altra possibilità consiste nel porre il centro di rigidezza degli isolatori  $F_D$  coincidente con il centro di rigidezza  $F$  della struttura (la cui posizione si assume essere costante ad ogni piano del telaio). In questo modo, poiché la posizione del centro di rigidezza non varia, la risposta del sistema principale può essere meno influenzata dai modi superiori.

Considerando IF della sezione 2.4.2, viene svolta un'analisi parametrica al variare di  $\rho$  (Eq. (2.35)). Nello specifico, il valore massimo dello spostamento  $\hat{v}_{L_d}$  (che rappresenta lo spostamento della sottostruttura, sotto il piano di discontinuità) e del drift  $\hat{v}_{np+1} - \hat{v}_{L_d+1}$  (che rappresenta la sovrastruttura) è rappresentato nei grafici in funzione di  $\rho$ . Ogni grafico di Fig. 2.20 mostra due curve: la linea sottile si riferisce al caso in cui  $F_D = F^6$  mentre la linea spessa si riferisce al caso in cui  $F_D = G^7$ . Le prime due righe di Fig. 2.20 sono riferite a  $L_d = 3$ , mentre le ultime due righe si riferiscono a  $L_d = 4$ . I grafici della colonna di sinistra si riferiscono alla registrazione del

---

<sup>6</sup>In altre parole il centro di rigidezza del piano di discontinuità coincide con il centro di rigidezza della struttura.

<sup>7</sup>In questo caso il centro di rigidezza del piano di discontinuità coincide con il centro di massa della struttura.

terremoto di Pacoima mentre quelli di destra si riferiscono alla registrazione del terremoto di Kobe ( Fig. 2.12).

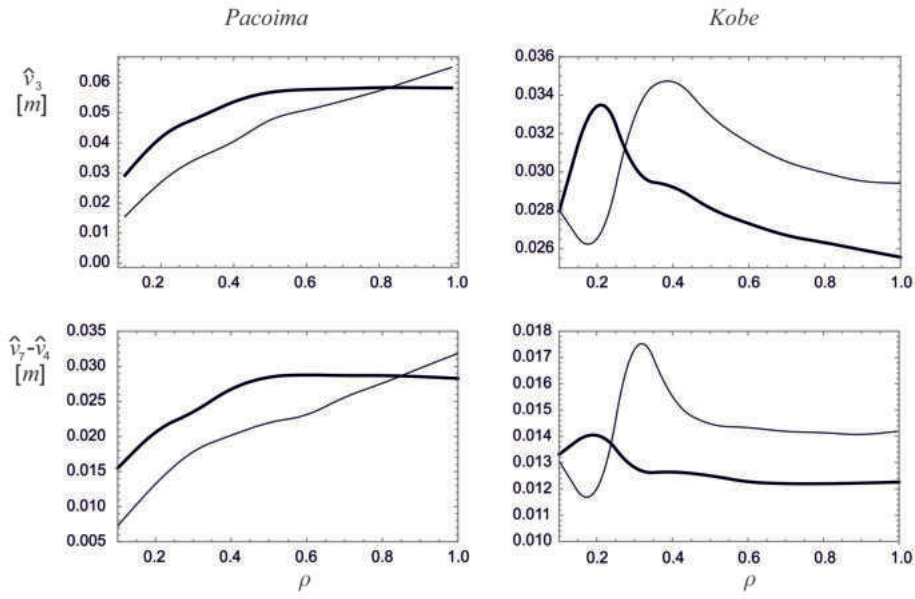
I risultati mostrano che l'abilità della discontinuità di ridurre gli spostamenti del telaio dipende principalmente da  $\rho$ . In riferimento al caso in cui  $L_d = 3$ , il posizionamento degli isolatori in modo che  $F_D = F$  (linea sottile) può avere prestazioni superiori per bassi valori di  $\rho$ . Questo fatto si verifica in quanto la struttura non presenta significative variazioni lungo l'altezza e pertanto si ha una dinamica più regolare dove il modo principale è predominante. Al contrario, qualora  $F_D = G$  (linea spessa), la discontinuità ha prestazioni superiori qualora il valore di  $\rho$  sia alto. Nel caso in cui  $L_d = 4$ , l'utilizzo di isolatori posizionati in modo tale che  $F_D = F$  ha sempre prestazioni più elevate del caso in cui  $F_D = G$ .

Infine, si ricorda che gli effetti dell'eccentricità del piano di discontinuità possono essere investigati esclusivamente con un modello tridimensionale e non sono considerati dal modello archetipo. Difatti, il modello archetipo può fornire informazioni utili in fase di predimensionamento che possono essere migliorate arricchendo il modello strutturale in maniera opportuna.

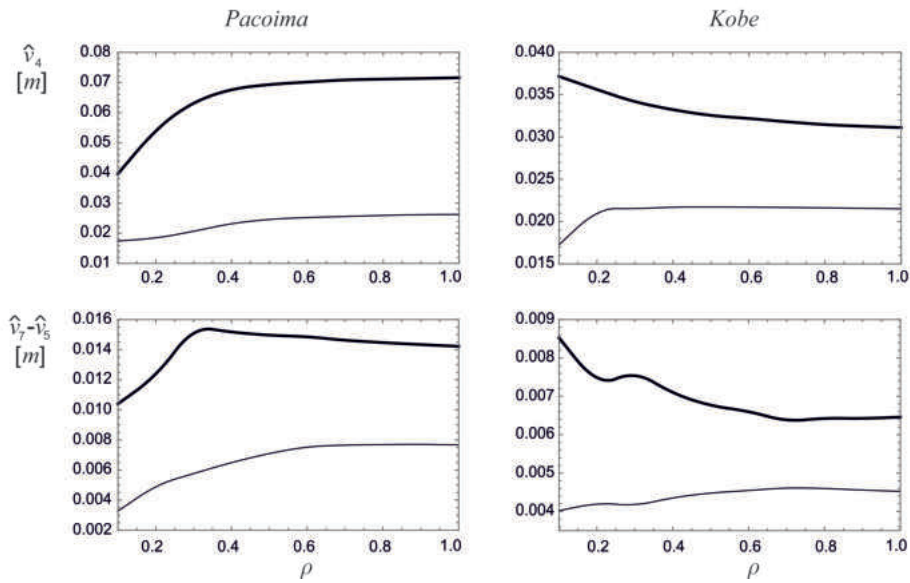
### 2.4.5 Mappe spettro-compatibili

L'utilizzo di singole registrazioni sismiche produce risultati di interesse limitato in quanto la maggior parte delle norme tecniche forniscono uno spettro di progetto. L'obiettivo dell'analisi in questa sezione è ottenere uno strumento riferito ad uno specifico spettro di progetto e non alla singola registrazione sismica. Le analisi sono svolte utilizzando il modello archetipo poiché, come osservato nella sezione precedente, esso può descrivere correttamente il comportamento di strutture sufficientemente regolari. A questo proposito si utilizzano tre set di registrazioni sismiche spettro compatibili riportate nel paragrafo 2.4.0.1. Gli spettri di risposta medi di ogni set di sette registrazioni spettro-compatibili sono ottenuti come media aritmetica dei valori massimi delle risposte delle singole registrazioni. Quindi in maniera analoga allo spettro medio, si introducono i coefficienti di guadagno medi così definiti:

Piano di discontinuità - 3° Piano



Piano di discontinuità - 4° Piano



**Fig. 2.20:** Spostamenti  $u_1$  e  $u_2 - u_d$  in funzione di  $\rho$ : il centro di rigidezza della discontinuità coincide con quello della struttura (linea sottile) oppure coincide con il baricentro delle masse (linea spessa).

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{\sum_{i=1}^n \max[u_{1i}(t)]}{\sum_{i=1}^n \max[u_{1i}^A(t)]} \\
 \alpha_2 &= \frac{\sum_{i=1}^n \max[u_{2i}(t) - u_{di}(t)]}{\sum_{i=1}^n \max[u_{2i}^A(t) - u_{1i}^A(t)]} \\
 \alpha_3 &= \frac{\sum_{i=1}^n \max[u_{di}(t) - u_{1i}(t)]}{\sum_{i=1}^n \max[u_{di}^B(t)]}
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

dove  $n$  è il numero totale di registrazioni sismiche utilizzate per costruire lo spettro. I coefficienti di guadagno medi sono il rapporto degli spostamenti del modello archetipo (Fig. 2.1b) e gli spostamenti dei sistemi ausiliari A e B (Fig. 2.2). Il coefficiente  $\alpha_1$  valuta la riduzione o l'incremento di spostamento della sottostruttura. Il coefficiente  $\alpha_2$  valuta la riduzione o l'incremento di drift della sovrastruttura. Il coefficiente  $\alpha_3$  misura la capacità della sottostruttura di filtrare il moto sismico alla base, in altre parole la sua capacità di ridurre gli spostamenti del piano di discontinuità rispetto al caso in cui il piano di discontinuità fosse poggiato direttamente sul terreno. Quando questi coefficienti sono inferiori all'unità, la discontinuità è in grado di migliorare il comportamento dinamico del telaio rispetto allo stesso telaio in assenza di discontinuità.

I coefficienti medi sono costruiti come media degli spostamenti massimi, in maniera analoga agli spettri medi. Pertanto, poiché i modelli (principale e ausiliari) sono lineari, i coefficienti di guadagno medi dipendono solo dallo spettro di progetto e non dalle singole registrazioni del set. Di conseguenza, due set di terremoti differenti, compatibili con lo stesso spettro, forniranno lo stesso risultato, a meno di un certo intervallo di tolleranza che dipende dalla tolleranza utilizzata per costruire lo spettro medio in relazione allo spettro target.

#### 2.4.5.1 Curve e mappe di guadagno

Le curve di guadagno sono le curve che rappresentano gli  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) in funzione di  $\rho$ . La Fig. 2.21 mostra le curve di guadagno di RF. Tali curve di guadagno sono ottenute eccitando la struttura con il primo set (Set 1) di registrazioni spettro-compatibili, relativo allo spettro di progetto di l'Aquila. Gli smorzamenti associati al telaio ed alla discontinuità sono, rispettivamente,  $\zeta_s = 5\%$  e  $\zeta_d = 10\%$ . In particolare, ogni grafico di Fig. 2.21 corrisponde ad un differente  $L_d$  e contiene due differenti curve che rappresentano i coefficienti medi  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . La Fig. 2.21 mostra che i coefficienti di guadagno medi sono inferiori all'unità (eccetto per  $\alpha_2$  in  $L_d = 5$  in uno specifico intervallo di  $\rho$ ) e quindi la discontinuità migliora il comportamento sismico del telaio. Inoltre, se la discontinuità è posizionata ai piani inferiori ( $L_d = 1, 2$ ), allora i valori minimi di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  si verificano per gli stessi valori di  $\rho$ . Questo significa che lo stesso valore di  $\rho$  può ottimizzare il comportamento dinamico di sia sovrastruttura che sottostruttura. Se il piano di discontinuità si trova ai piani superiori ( $L_d = 4, 5$ ), allora non è possibile ottimizzare contemporaneamente sottostruttura e sovrastruttura in quanto i punti di minimo dei coefficienti sono caratterizzati da valori di  $\rho$  diversi tra loro.

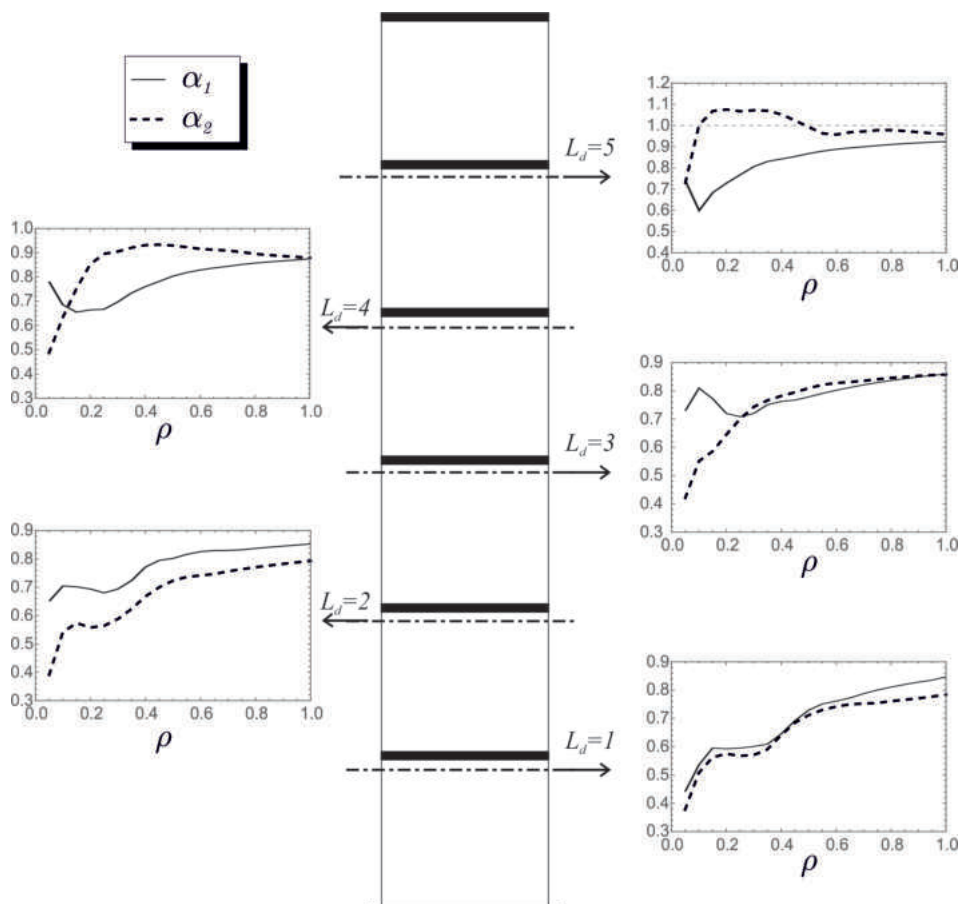
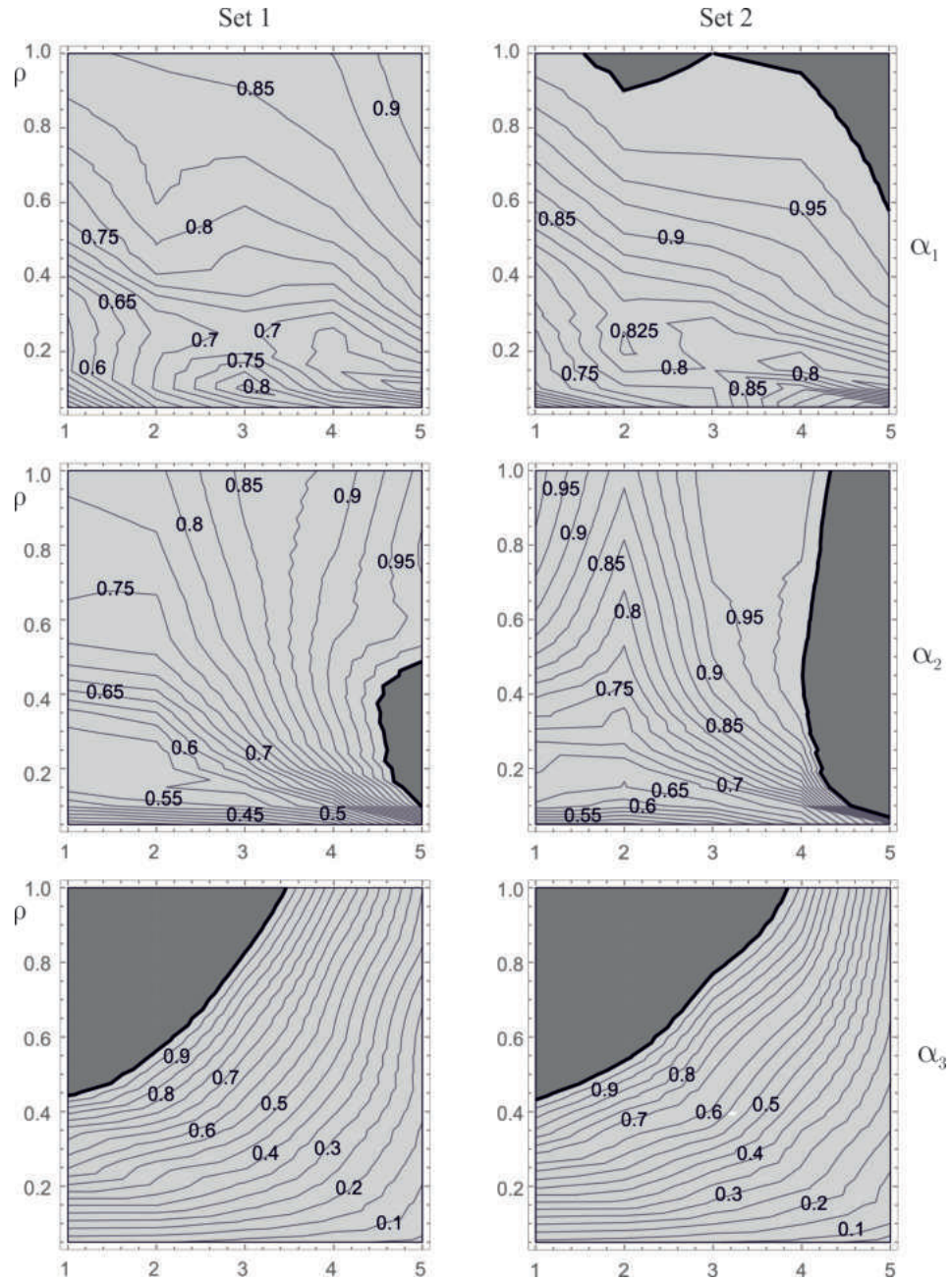


Fig. 2.21: Curve di guadagno relative allo spettro di progetto di L'Aquila (Set 1).

In maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo 2.3 per una struttura di  $N$  piani, si costruiscono  $N - 1$  curve di guadagno che vengono poi organizzate in mappe di guadagno nel piano dei parametri  $\rho$ - $L_d$ . Le mappe sono ottenute applicando un'interpolazione lineare tra curve di guadagno. In questa sezione le mappe di guadagno sono costruite sia per RF che IF (descritti nella sezione 2.4.2). La Fig. 2.22 mostra le mappe di guadagno per RF, eccitato da due set di registrazioni spettro-compatibili con lo stesso spettro di progetto di L'Aquila. Gli smorzamenti associati al telaio ed alla discontinuità sono, rispettivamente,  $\xi_s = 5\%$  and  $\xi_d = 10\%$ . Il confronto tra le mappe delle due colonne di Fig. 2.22 mostra che le differenze tra i risultati dei due set sono inferiori all'intervallo di tolleranza utilizzato per costruire lo spettro medio. Se il numero di registrazioni utilizzate per costruire lo spettro aumenta, allora l'intervallo di tolleranza si riduce e le mappe convergono. I risultati mostrano che ci sono ampie regioni nel piano dei parametri dove i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità. Pertanto, la discontinuità può ridurre gli spostamenti del telaio. Le mappe indicano che le prestazioni più elevate sono ottenute per bassi valori di  $\rho$  e  $L_d$ . Questo si verifica poiché si sta considerando un edificio di sei piani di altezza

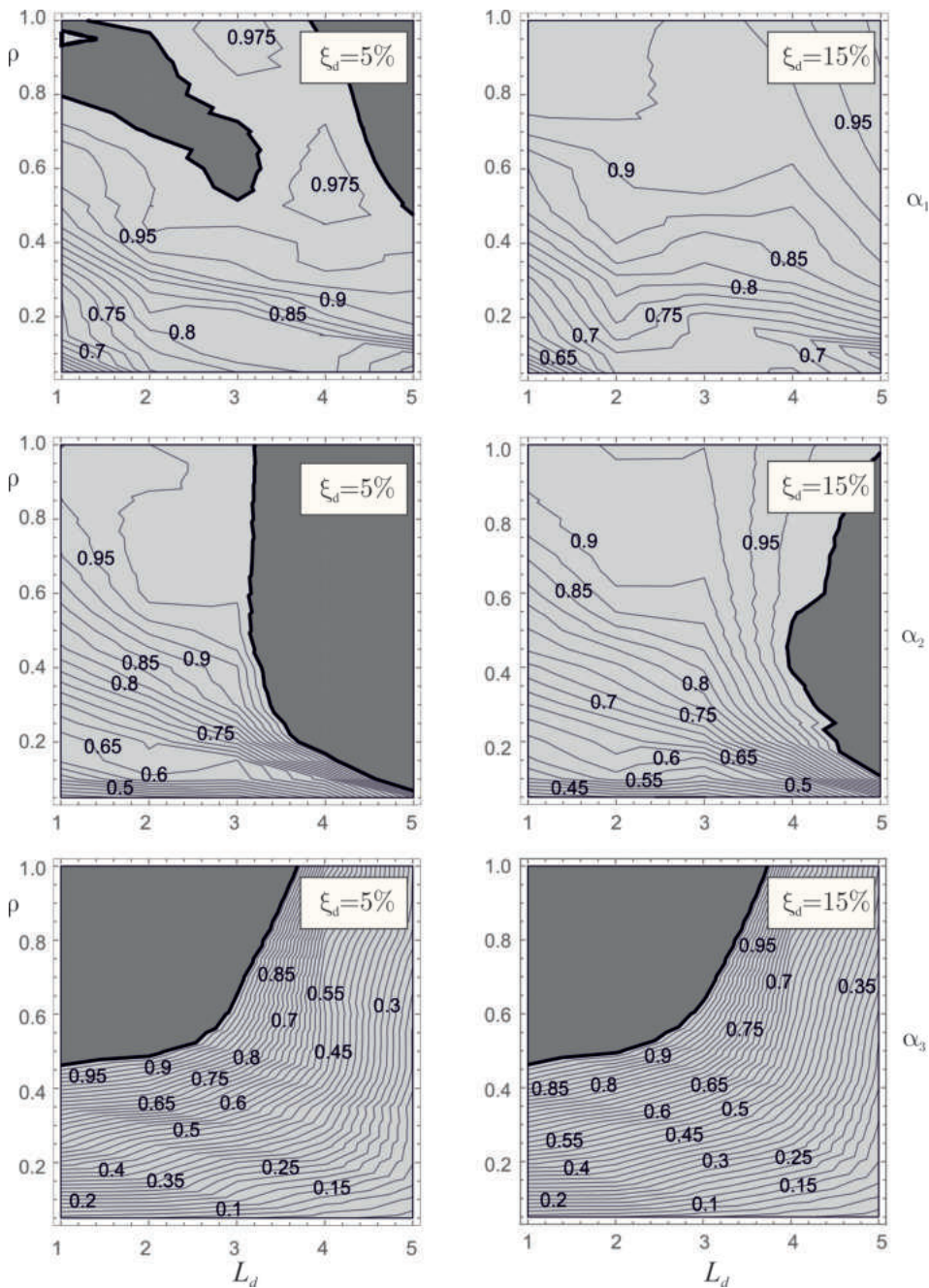
ridotta. Nel caso di strutture molto alte, ad esempio edifici a torre, le prestazioni della discontinuità posizionata ai livelli inferiori diminuiscono, come evidenziato da [65]. Inoltre, anche quando la discontinuità è posizionata ai livelli superiori si può ottenere una riduzione degli spostamenti adottando specifici valori di  $\rho$ .



**Fig. 2.22:** Mappe di guadagno relative ai due set di registrazioni spettro-compatibili con lo spettro di progetto di l'Aquila (RF): (a) Set 1; (b) Set 2.

La Fig. 2.23 mostra le mappe di guadagno di RF, eccitato dal terzo set di registrazioni (Set 3) spettro-compatibili con lo spettro di progetto di Los Angeles. Lo smorzamento associato al telaio è  $\zeta_s = 5\%$  mentre lo smorzamento associato al piano di discontinuità è variabile. Infatti, in Fig. 2.23 la

colonna di sinistra si riferisce ad un valore  $\xi_d = 5\%$  mentre la colonna di destra si riferisce ad un valore  $\xi_d = 15\%$ . Il risultato suggerisce che valori elevati di smorzamento riducono gli spostamenti di sottostruttura e sovrastruttura. Infatti,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  diminuiscono quando  $\xi_d$  aumenta. Al contrario, la mappa di  $\alpha_3$  non è influenzata da  $\xi_d$ . Questo vuol dire che  $\xi_d$  non modifica la capacità filtrante della sottostruttura. Si può anche notare che valori inferiori di  $\alpha_3$  possono essere trovati per alti valori di  $L_d$  a causa della rigidità più bassa della sottostruttura.



**Fig. 2.23:** Mappe di guadagno relative allo spettro di progetto di Los Angeles (Set 3) per due differenti valori di  $\xi_d$  (RF): (a)  $\xi_d = 5\%$ ; (b)  $\xi_d = 15\%$ .

Infine, nella Fig. 2.24 sono riportate le mappe di guadagno di  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) per IF, eccitato dal Set 1 dal Set 3, compatibili rispettivamente con gli spettri di progetto di l'Aquila e Los Angeles. In questo caso si considera  $\xi_s = 5\%$  e  $\xi_d = 10\%$ . I risultati mostrano che la discontinuità è in grado di migliorare il comportamento sismico anche di strutture non regolari, avvenuti effetti torsionali non trascurabili. Tuttavia, le regioni di guadagno (zone colorate) dei coefficienti  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , e  $\alpha_3$  sono più piccole che nel caso di RF. Si può affermare che l'irregolarità del telaio riduce l'efficacia della discontinuità, sebbene esistano ancora molti valori delle coppie di parametri per i quali si ha un miglioramento della risposta sismica della struttura. Ad esempio, se consideriamo il punto A ( $L_d = 3$ ,  $\rho = 0.1$ ) delle mappe riferite al Set 3 (Los Angeles, colonna a destra) si verifica un miglioramento generale della struttura. Infatti, poiché in tale punto sia  $\alpha_1$  che  $\alpha_2$  sono inferiori all'unità, sia lo spostamento della sottostruttura che il drift della sovrastruttura sono ridotti rispetto al telaio senza discontinuità. Inoltre, poiché anche  $\alpha_3$  è inferiore all'unità, allora vi è una riduzione dello spostamento del piano di discontinuità rispetto al modello ausiliario B. Come detto in precedenza, un ulteriore miglioramento delle prestazioni sismiche della discontinuità può essere raggiunto scegliendo opportunamente la posizione del centro di rigidità del piano di discontinuità.

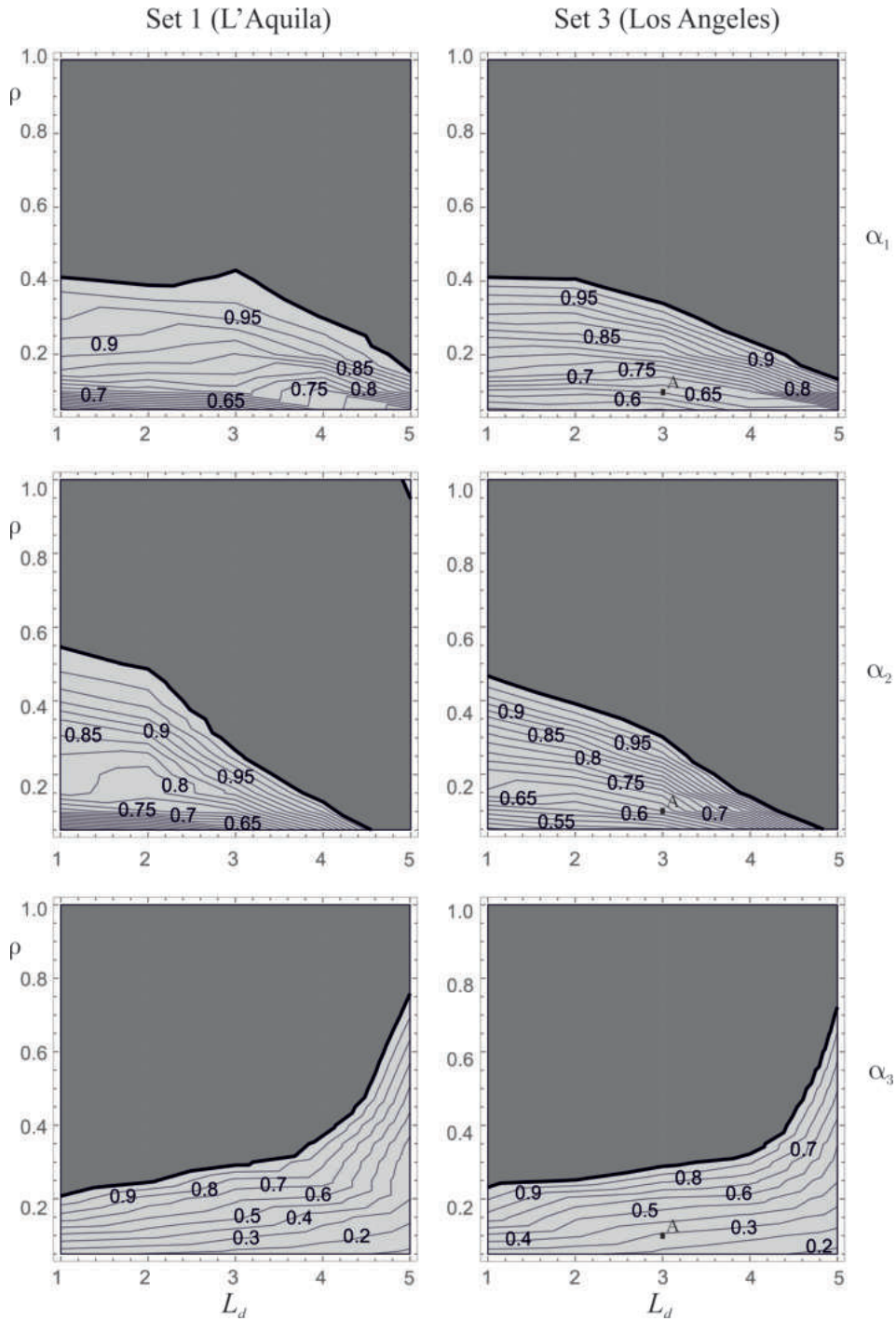
L'abilità del modello archetipo a descrivere la dinamica di generici telai M-GDL rende le curve, o equivalentemente le mappe, uno strumento utile al predimensionamento della discontinuità. E' possibile quindi utilizzare la procedura semplificata per ottimizzare la scelta dei parametri di progetto della discontinuità  $\rho$  e  $L_d$ .

## 2.5 Analisi non lineare

### 2.5.1 Il modello meccanico

Il sistema principale rappresenta la struttura dopo l'introduzione della discontinuità (Fig. 2.25a) e il sistema ausiliario rappresenta la stessa struttura senza discontinuità (Fig. 2.25b). Come visto nella sezione precedente, entrambi i sistemi possono essere modellati attraverso un modello archetipo (Fig. 2.26).

In questi modelli,  $m_1$  e  $m_2$  rappresentano le masse mentre  $k_1$  e  $k_2$  rappresentano, rispettivamente, la rigidità della sottostruttura e quella della sovrastruttura. Nel sistema principale, il legame costitutivo dei dispositivi di isolamento componenti la discontinuità è modellato attraverso il modello



**Fig. 2.24:** Mappe di guadagno di IF ottenute per: (a) Spettro di progetto di Los Angeles (Set 3); (b) Spettro di progetto di L'Aquila (Set 1).

di Bouc-Wen [75]. Le equazioni del moto del sistema principale sono:

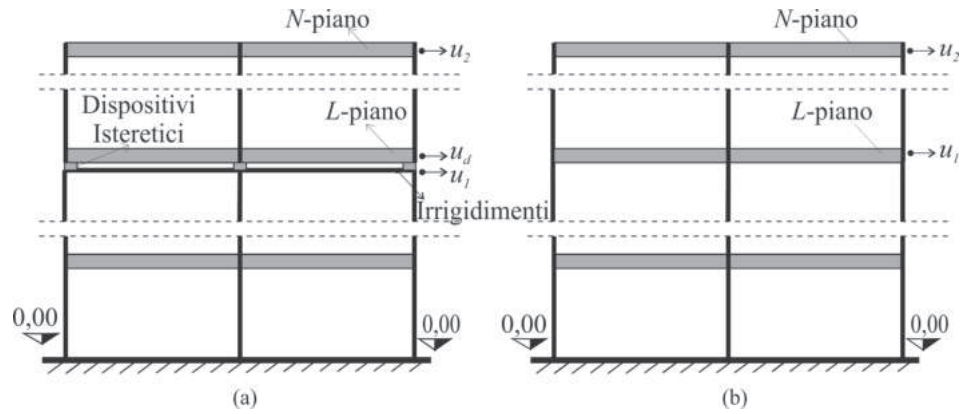


Fig. 2.25: Schema strutturale del (a) sistema principale e (b) sistema ausiliario.

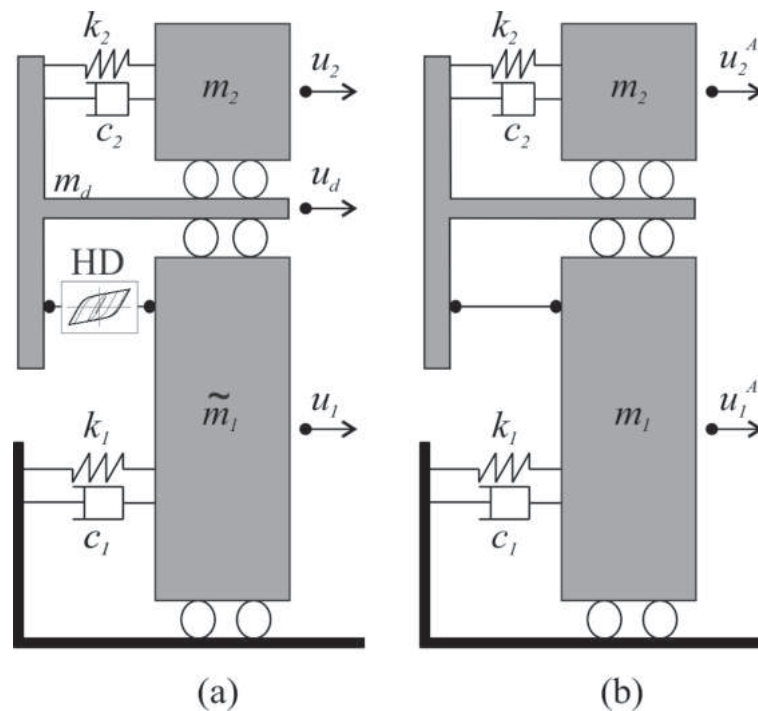


Fig. 2.26: Modello archetipo del (a) sistema principale e (b) ausiliario. HD: Comportamento Elasto-plastico del dispositivo isteretico.

$$c_{11}\dot{u}_1(t) + c_{12}\dot{u}_d - F_h(t) + k_1u_1(t) + m_1\ddot{u}_1(t) = -m_1a_g(t) \quad (2.40a)$$

$$c_{21}\dot{u}_1 + c_{22}\dot{u}_d(t) + c_{23}\dot{u}_2(t) + F_h(t) + k_2[u_d(t) - u_2(t)] + m_d\ddot{u}_d(t) = -m_da_g(t) \quad (2.40b)$$

$$c_{32}\dot{u}_d(t) + c_{33}\dot{u}_2(t) + k_2u_2(t) - k_2u_d(t) + m_2\ddot{u}_2(t) = -m_2a_g(t) \quad (2.40c)$$

$$\dot{z}(t) = [\dot{u}_d(t) - \dot{u}_1(t)] \{AA - |z(t)|^n \{\beta_1 + \gamma_1 \text{sgn}\{z(t) [\dot{u}_d(t) - \dot{u}_1(t)]\}\} u_y^{-1} \quad (2.40d)$$

dove  $AA$ ,  $n$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  sono i parametri di Bouc-Wen. Questi parametri sono funzionalmente ridondanti in quanto ci sono molteplici set di valori dei parametri capaci di produrre la medesima risposta per un assegnata ec-

citazione esterna. La ridondanza può essere rimossa fissando uno dei parametri. Una possibilità è porre  $AA = 1$  così che  $k_e = F_y/u_y$  acquisisca il significato di rigidezza elastica [76, 77].

I parametri  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  controllano la forma e la dimensione del ciclo di isteresi, come dimostrato in [75]. Comunque, essi mancano di una precisa interpretazione fisica. [76, 78] suggeriscono di assumere  $\beta_1 + \gamma_1 = 1$ . I due vincoli  $\beta_1 + \gamma_1 = 1$  e  $AA = 1$  consentono di attribuire un significato fisico ben preciso ai valori  $F_y, u_y, \psi$ . Sotto questi vincoli, il parametro isteretico adimensionale  $z(t)$  varia nell'intervallo  $[-1, 1]$ . In particolare, si pone  $AA = 1, n = 2$  e  $\beta_1 = \gamma_1 = 1/2$ . La forza del sistema isteretico è definita da:

$$F_h(t) = \Psi k_d(u_d(t) - u_1(t)) + k_d u_y (1 - \Psi) z(t) \quad (2.41)$$

dove  $\Psi$  è il rapporto tra la rigidezza plastica e quella elastica  $k_d$ .

Considerando le equazioni del sistema per  $\Psi = 1$  è possibile ottenere la matrice di rigidezza elastica  $\mathbf{K}$  e la matrice di massa  $\mathbf{M}$ . Note queste, la matrice di smorzamento  $\mathbf{C}$  è ottenuta attraverso la formulazione di Rayleigh classica.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Le equazioni del moto del modello archetipo relativo al sistema ausiliario sono descritte dalle classiche equazioni di un sistema a due gradi di libertà. L'equivalenza dinamica è riportata in appendice A.1 ed è stata ampiamente discussa nel paragrafo 2.4.3. Si ricorda che la procedura consente di determinare le masse  $m_1$  e  $m_2$  e le rigidezze  $k_1$  e  $k_2$  della sottostruttura e della sovrastruttura così che essa possa essere descritta attraverso un modello a ridotto numero di gradi di libertà (archetipo). La rigidezza elastica della discontinuità e lo spostamento limite elastico sono parametrizzati nel seguente modo:

$$k_d = \rho k_p \quad u_y = \eta u_0 \quad (2.43)$$

dove  $k_p$  è la rigidezza del singolo piano della struttura intelaiata mentre  $u_0$  è lo spostamento massimo ammissibile sul piano di discontinuità.

## 2.5.2 Caratteristiche del telaio

L'edificio di riferimento è un telaio regolare a sei piani. La massa di piano è  $m_p = 310.5 \text{ kg} \times 10^3$ , avendo considerato una superficie di  $250 \text{ m}^2$ . La

rigidezza di piano  $k_p = 476779$  kN/m. Lo smorzamento viscoso relativo alla struttura è  $\zeta = 5\%$ . Le caratteristiche del modello archetipo sono riportate in Tab. 2.5.

**Tabella 2.5:** Caratteristiche meccaniche del modello archetipo.

$L_d$	$m_1$ [kg $\times 10^3$ ]	$\tilde{m}_1$ [kg $\times 10^3$ ]	$m_2$ [kg $\times 10^3$ ]	$k_1$ [kN/m]	$k_2$ [kN/m]
1	301.5	150.75	1507,50	602403	182552
2	603.0	425.25	1206.00	292175	208839
3	904.5	735.75	904.50	207567	250374
4	1206	1055.25	603.00	177681	324132
5	1507.5	1356.75	301.50	167962	476779

### 2.5.3 Coefficienti di guadagno

I risultati del sistema principale devono essere comparati con quelli del sistema ausiliario in modo da poter determinare se l'utilizzo della discontinuità è in grado di ridurre la risposta dinamica della struttura. Analogamente a quanto fatto in sezione 2.3.2, si definiscono tre coefficienti di guadagno:

$$\alpha_1 = \frac{\max[u_1(t)]}{\max[u_1^A(t)]}; \quad \alpha_2 = \frac{\max[u_2(t) - u_d(t)]}{\max[u_2^A(t) - u_1^A(t)]}; \quad \alpha_3 = \frac{\max[u_d(t) - u_1(t)]}{u_0} \quad (2.44)$$

I coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  hanno lo stesso significato di quelli descritti in sezione 2.3.2. Al contrario  $\alpha_3$  assume un nuovo significato. Infatti esso rappresenta il rapporto tra lo spostamento massimo della discontinuità e lo spostamento massimo ammissibile ( $u_0 = 15$  cm). Se i parametri forniscono valori di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  inferiori all'unità, ma il valore di  $\alpha_3$  è superiore all'unità, allora non è possibile realizzare la discontinuità, anche se essa risulta "teoricamente" vantaggiosa.

### 2.5.4 Il comportamento qualitativo della discontinuità elastoplastica

L'analisi armonica è eseguita sul telaio le cui caratteristiche sono riportate in sezione 2.5.2. Le analisi sono svolte in forma parametrica in modo da comprendere come i parametri influenzano la risposta del sistema. Poiché il sistema non è lineare, l'ampiezza dell'oscillazione armonica  $A$  è il primo parametro da considerare. Il secondo parametro è il rapporto di rigidezza  $\Psi$  tra la rigidezza plastica e la rigidezza elastica. L'ultimo parametro è  $u_y$ , il quale rappresenta lo spostamento limite elastico.

### 2.5.4.1 Dipendenza dall'ampiezza

I risultati delle analisi sono riportati in spettri, dove si mostra il massimo della risposta in funzione della frequenza dell'eccitazione esterna. Gli spettri rappresentano lo spostamento massimo della sottostruttura ( $\chi_1 = \text{Max}|u_1(t)|/u_0$ ) e della sovrastruttura ( $\chi_2 = \text{Max}|u_2(t) - u_d(t)|/u_0$ ) al variare di  $\beta = \Omega/\omega_1$ , dove  $\omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ . La Fig. 2.27 mostra gli spettri ottenuti per  $L_d = 3$  e  $\Psi = 0.25$ . Nella prima riga, si osservano gli spettri del sistema con discontinuità (MS) al variare dell'ampiezza della forzante. Si nota che la variazione di  $A$  modifica leggermente le posizioni dei picchi, o in altre parole, che la plasticità modifica la posizione delle frequenze fondamentali. Infatti all'aumentare di  $A$ , il sistema viene spinto nella fase plastica e raggiunta quest'ultima vi è una variazione della frequenza propria del sistema. Tuttavia tale variazione è molto piccola. La seconda e terza riga di Fig. 2.27 mostrano gli spettri del sistema principale (MS) con quelli del sistema di riferimento (RF)<sup>8</sup>. Ad ampiezze elevate il rapporto tra il massimo della curva RF e quello della curva MS aumenta. Difatti per ampiezze elevate, si supera la fase elastica ed i cicli di isteresi sono più ampi consentendo una maggiore dissipazione di energia e quindi una diminuzione degli spostamenti. Si può osservare dagli spettri di  $\chi_1$  e  $\chi_2$  che è sempre possibile ottenere miglioramenti dal comportamento dinamico del sistema. Infatti negli spettri di  $\chi_1$  si osserva un comportamento tipo TMD, dove da un picco iniziale si ottengono 2 picchi, ma di altezza ridotta. Per quanto riguarda  $\chi_2$  invece, si vede una traslazione del picco a frequenze inferiori (ovvero un aumento del periodo fondamentale), tipico di strutture a base isolata. Pertanto, come già visto nella sezione precedente, la sovrastruttura si comporta da Tuned Mass Damper per la sottostruttura e la sovrastruttura stessa agisce come fosse isolata sul piano di isolamento. In generale l'ampiezza dei cicli di isteresi (i cui effetti sono visibili nel grafico con  $A$  elevata) non modifica l'andamento qualitativo della curva, tuttavia ne riduce i picchi.

La Fig. 2.28 mostra gli spettri ottenuti per  $L_d = 3$  e  $\Psi = 0.75$ . Seppure l'andamento qualitativo delle curve è il medesimo di Fig. 2.27, si osserva che la riduzione di spostamento massimo tra RF e MS è inferiore rispetto al caso in cui  $\Psi = 0.25$ .

---

<sup>8</sup>Si ricorda che con sistema principale ci si riferisce al telaio dopo l'introduzione della discontinuità, mentre con sistema di riferimento ci si riferisce allo stesso telaio ma senza discontinuità.

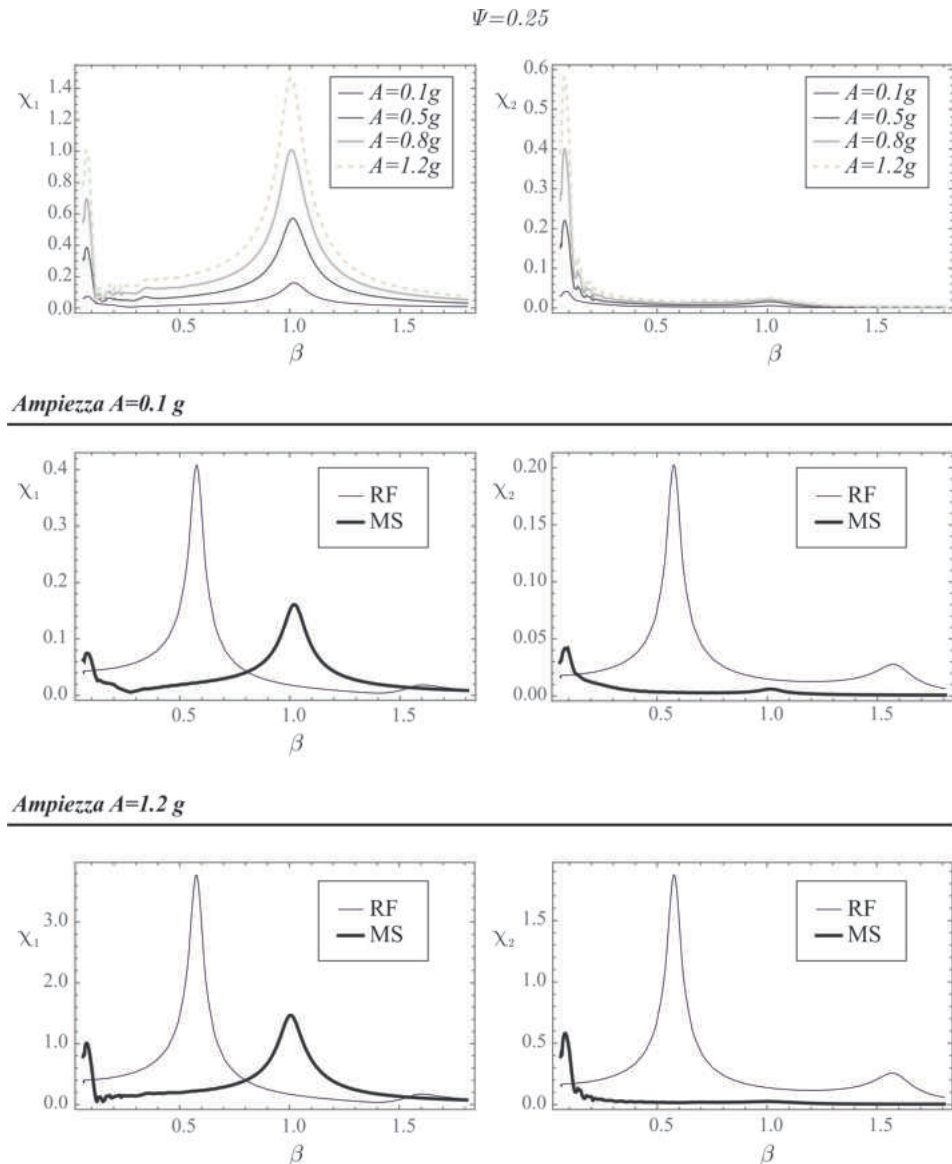


Fig. 2.27: Spettri ottenuti per  $L_d = 3$  e  $\Psi = 0.25$ .

#### 2.5.4.2 La dipendenza da $\Psi$

Per analizzare come il parametro  $\Psi$ , il quale rappresenta il rapporto tra la rigidità post-servamento e quella elastica, influenza le prestazioni della discontinuità, si costruiscono delle mappe di guadagno in funzione del rapporto di rigidità  $\rho = k_d/k_p$  e del rapporto  $\eta = u_y/u_0$ . Ognuna delle mappe riportate di seguito è riferita ad un preciso valore del rapporto di plasticità  $\Psi$ . La Fig. 2.29 mostra sulla colonna di sinistra le mappe relative a  $\Psi = 0.25$  mentre sulla colonna di destra le mappe relative a  $\Psi = 0.75$ . In particolare le mappe di Fig. 2.29a sono riferite al coefficiente  $\alpha_1$  mentre le mappe di Fig. 2.29b sono riferite al coefficiente  $\alpha_2$ . Tali mappe sono relative ad una frequenza circolare  $\Omega = 12.5$  e ad un'ampiezza della forzante  $A = 0.1g$ . Tali mappe mostrano una forte correlazione tra la rigidità ela-

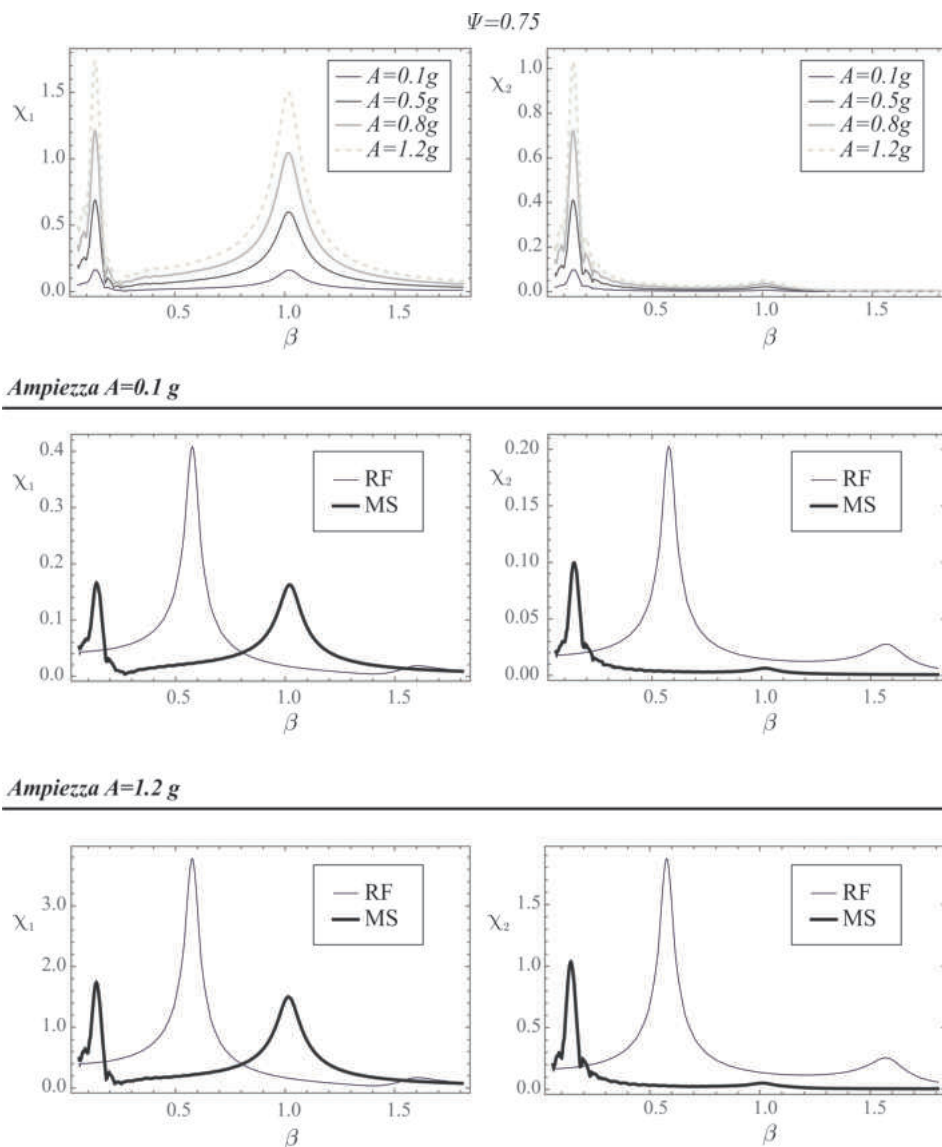


Fig. 2.28: Spettri ottenuti per  $L_d = 3$  e  $\Psi = 0.75$ .

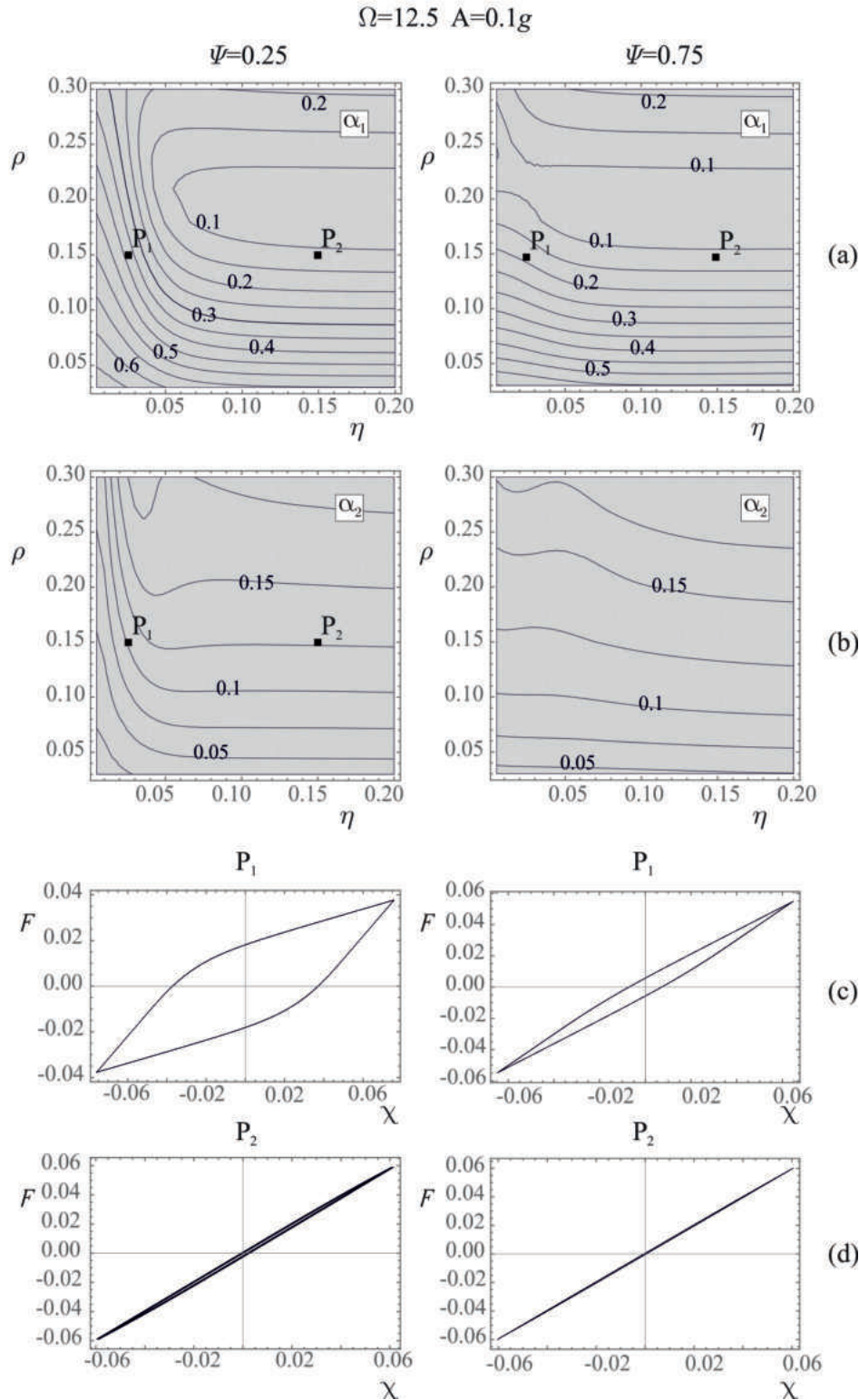
stica e lo spostamento limite elastico nell'influencare i valori dei coefficienti di guadagno. Dalle mappe di Fig. 2.29a e Fig. 2.29b si osserva che le curve di livello, dopo un primo tratto, si dispongono in orizzontale. Questo vuol dire che il coefficiente di guadagno non dipende da  $\eta$  per valori sufficientemente alti di esso. Si definisce  $\eta_{lim}$  come il massimo valore di  $\eta$  per cui la forzante riesce a mandare in campo plastico gli isolatori. Se  $\eta > \eta_{lim}$ , allora per quella data forzante gli isolatori restano in campo elastico. Infatti, se  $\eta$  è abbastanza grande, allora la forzante esterna non è capace di spingere la discontinuità in campo plastico, e pertanto il coefficiente dipende solo da  $\rho$ , ovvero dalla rigidità elastica del sistema. Si nota inoltre che il valore di  $\eta_{lim}$  oltre il quale il coefficiente di guadagno non dipende più da  $\eta$  è funzione di  $\rho$ . Questo è dovuto al fatto che il raggiungimento dello spostamento limite elastico è influenzato dalla rigidità elastica della

discontinuità, ovvero da  $\rho$ . Infatti, minore è la rigidezza, più facilmente lo spostamento raggiunge  $u_y$ <sup>9</sup>. Le Fig. 2.29c e Fig. 2.29d riportano i cicli di isteresi nei punti  $P_1$  e  $P_2$ . Un valore di  $\Psi$  più alto implica una minore plasticità della disconnessione (come si può osservare nella seconda colonna di Fig. 2.29c e Fig. 2.29d) e quindi, anche qualora essa entra nel tratto non lineare, l'influenza della plasticità sulle mappe di guadagno risulta più limitata rispetto al caso in cui  $\Psi = 0.25$ . L'effetto meno marcato del comportamento non lineare in  $\Psi = 0.75$  può essere osservato dalla pendenza delle curve di livello delle mappe. Infatti in questo caso le variazioni del coefficiente di guadagno al variare di  $\eta$  sono più piccole rispetto al caso  $\Psi = 0.75$  e anche la dipendenza del valore di  $\eta_{lim}$  rispetto a  $\rho$  è alquanto modesta. Qualora fosse  $\Psi = 1$ , ovvero il legame sarebbe puramente elastico, le curve di livello sarebbero sempre orizzontali.

Nella Fig. 2.30 si osservano le mappe nel piano dei parametri  $\rho$ - $\eta$  calcolate con un valore maggiore della ampiezza della forzante ( $A = 0.8g$ ) in (a), con un valore differente della frequenza circolare dell'eccitazione esterna ( $\Omega = 15.0$ ) in (b) e con un differente valore di  $L_d$  ( $L_d = 5$ ) in (c). Dall'osservazione di queste mappe segue che, quando l'ampiezza della forzante cresce, il valore di  $\eta_{lim}$  si sposta all'esterno dell'intervallo dei parametri considerato. Infatti gli spostamenti aumentano in maniera sostanziale ed è molto più semplice raggiungere lo spostamento necessario a spingere la discontinuità nel tratto plastico. La Fig. 2.30b rappresenta le stesse mappe di Fig. 2.29 per un diverso valore della frequenza della forzante ( $\Omega = 15.0$ ). Infatti, seppure il valore dei coefficienti di guadagno dipende fortemente da  $\Omega$ , l'andamento qualitativo delle curve di livello è il medesimo. Tuttavia per tale frequenza è molto più difficile sintonizzare la sovrastruttura ad agire come TMD, e difatti un'ampia porzione della mappa di  $\alpha_1$  si trova al di sopra dell'unità. Quando invece si fa variare la posizione della discontinuità ( $L_d = 5$ ) il valore di  $\eta_{lim}$  aumenta. Questo è dovuto alla capacità di filtro che la sottostruttura possiede nel trasferire le forze ai piani superiori. Tale effetto di filtro sarà di maggiore efficacia quando la sottostruttura è molto deformabile, o in altre parole quando la discontinuità è posizionata ai piani superiori. In generale si osserva che più la discontinuità entra in campo non lineare, più il coefficiente  $\alpha_2$  diminuisce mentre il coefficiente  $\alpha_1$  aumenta. Poiché  $\alpha_1$  rappresenta la capacità della sovrastruttura di agire come TMD per la sottostruttura, allora il comportamento plastico della discontinuità tende a "desintonizzare" la sovrastruttura. Questo tuttavia si verifica solamente quando  $\Omega = 15.0$ . Infatti,

<sup>9</sup>Si ricorda che  $u_y = \eta u_0$ , dove  $u_0$  è il massimo spostamento ammissibile sulla discontinuità.

Piano di discontinuità - 3° piano

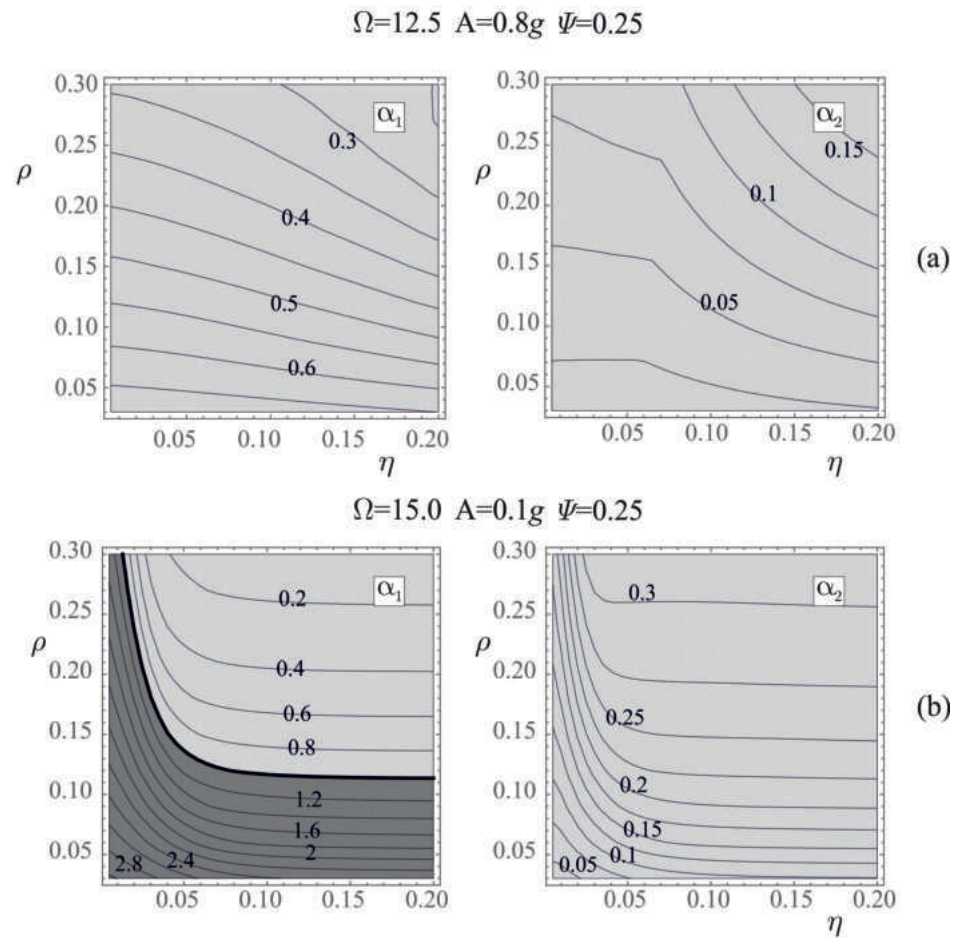


**Fig. 2.29:** Mappe di guadagno con  $L_d = 3$ ,  $\Omega = 12.5$ ,  $A = 0.1g$ : (a) mappe di  $\alpha_1$ ; (b) mappe di  $\alpha_2$ ; (c) cicli di isteresi in  $P_1(0.025, 0.15)$ ; (d) cicli di isteresi in  $P_2(0.15, 0.15)$ .

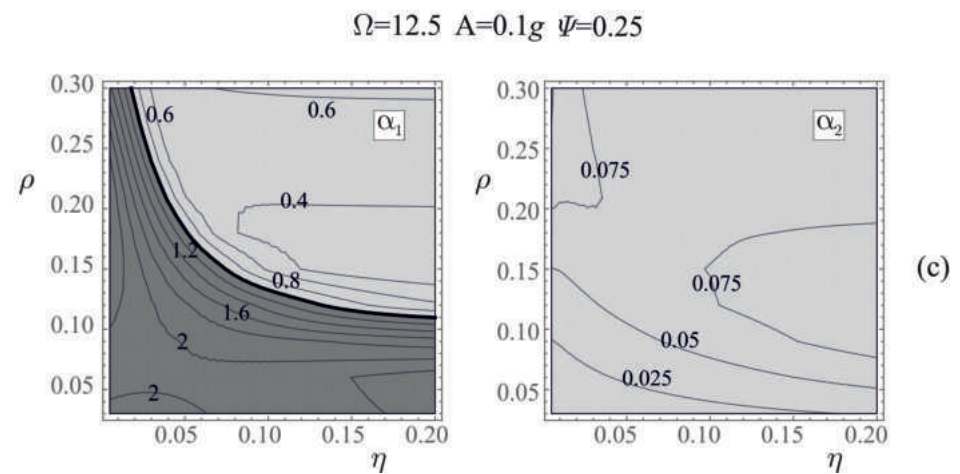
nelle mappa  $\alpha_1$  (prima colonna di Fig. 2.30c) si osserva che i valori minimi del coefficiente di guadagno si trovano dove  $\eta$  è elevato, ovvero dove il

piano di discontinuità non riesce ad entrare in campo plastico.

**Piano di discontinuità - 3° piano**



**Piano di discontinuità - 5° piano**



**Fig. 2.30:** Mappe di guadagno  $\eta$ - $\rho$ : (a)  $L_d = 3$ ,  $\Omega = 12.5$ ,  $A = 0.8g$  e  $\Psi = 0.25$ ; (b)  $L_d = 3$ ,  $\Omega = 15.0$ ,  $A = 0.1g$  e  $\Psi = 0.25$ ; (c)  $L_d = 5$ ,  $\Omega = 12.5$ ,  $A = 0.1g$  e  $\Psi = 0.25$ ;

### 2.5.5 Analisi sismica

L'analisi sismica è svolta utilizzando molte registrazioni sismiche ottenute da [79]. Le registrazioni sismiche sono state scelte considerando una distribuzione uniforme per magnitudo e distanza epicentrale, dove la magnitudo varia tra 4 e 8 e la distanza epicentrale da 10 a 30 km. Il numero di registrazioni utilizzate assicura un valore ridotto del coefficiente di variazione (CoV). In particolare,  $CoV \leq 0.2$ . Pertanto l'abilità predittiva del modello di identificare lo spostamento medio è superiore all' 80%. Lo spostamento medio è rappresentato dalla media degli spostamenti massimi  $u_{i,j}$  di ogni registrazione:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} u_{i,j} \quad (2.45)$$

dove  $i = 1, d, 2$  e  $u_{1,j}$ ,  $u_{d,j}$  e  $u_{2,j}$  rappresentano, rispettivamente, lo spostamento massimo della sottostruttura, del piano di discontinuità e della sovrastruttura nella  $j$ -sima registrazione. Il numero totale di registrazioni sismiche usate nelle simulazioni è  $n_e$ . Il CoV è definito nel seguente modo:

$$CoV = \frac{\sigma(\bar{u}_i)}{\mu(\bar{u}_i)} \quad (2.46)$$

dove  $\sigma$  e  $\mu$  rappresentano, rispettivamente, la deviazione standard e la media.

Ne consegue che, in maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo 2.4.5, i coefficienti di guadagno medi sono così definiti:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_e} \max[u_{1i}(t)]}{\sum_{i=1}^{n_e} \max[u_{1i}^A(t)]} \\ \bar{\alpha}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_e} \max[u_{2i}(t) - u_{di}(t)]}{\sum_{i=1}^{n_e} \max[u_{2i}^A(t) - u_{1i}^A(t)]} \\ \bar{\alpha}_3 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_e} \max[u_{di}(t) - u_{1i}(t)]}{u_0} \end{aligned} \quad (2.47)$$

La Fig. 2.31 mostra le mappe di guadagno medie. Tali mappe rappresentano i coefficienti di guadagno medi nel piano dei parametri  $PGA$ - $\rho$ , dove  $PGA$  è l'accelerazione di picco al terreno mentre  $\rho$  è il rapporto di rigidità. Le mappe mostrano ampie zone di guadagno, laddove  $L_d = 1$  fornisce le massime prestazioni per  $\alpha_1$ ,  $L_d = 5$  mostra le prestazioni migliori su  $\alpha_2$ . Sempre considerando le due posizioni di discontinuità  $L_d = 1$  e  $L_d = 5$ , si nota che le mappe  $\bar{\alpha}_3$  mostrano valori superiori all'unità nella regione caratterizzata da alti valori di  $PGA$  e bassi valori di  $\rho$ , ovvero nella regione dove  $PGA > 1.1g$  e  $\rho < 0.1$ . Tale zona è la regione dove i coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$

esprimono la massima riduzione di spostamenti per sottostruttura e sovrastruttura. Tuttavia tale zona è molto piccola per cui è sufficiente spostarsi di poco con i parametri per trovare valori di  $\bar{\alpha}_1$  e  $\bar{\alpha}_2$  che soddisfino i requisiti in termini di spostamento e assicurino comunque una buona prestazione della strategia di protezione. Al contrario,  $L_d = 3$  mostra un comportamento intermedio tra i due e la relativa mappa  $\bar{\alpha}_3$  non mostra alcuna zona grigio scuro. In generale, se si considerano le mappe di  $\bar{\alpha}_1$  per i tre diversi valori di  $L_d$ , si osserva un decremento della prestazione passando da  $L_d = 1$  a  $L_d = 5$ . Questo può essere spiegato ricordando quanto descritto nel paragrafo 2.3. La sovrastruttura si comporta come un TMD per la sottostruttura e tale effetto è misurato dal coefficiente  $\bar{\alpha}_1$ . Un coefficiente  $\bar{\alpha}_1$  inferiore all'unità indica che la sovrastruttura riesce a ridurre gli spostamenti della sottostruttura. Questo effetto si riduce passando da  $L_d = 1$  a  $L_d = 5$  in quanto diminuisce il rapporto di massa del TMD<sup>10</sup> e quindi l'intervallo di frequenze per cui il sistema TMD è efficace si riduce. Al contrario il coefficiente  $\bar{\alpha}_2$ , seppur restando sempre sotto l'unità, diminuisce spostandosi da  $L_d = 1$  a  $L_d = 5$ . Infatti si ricordi che il coefficiente  $\alpha_2$  indica il funzionamento BI del sistema, ovvero la capacità del sistema di ridurre, attraverso il piano di discontinuità, gli spostamenti della sovrastruttura. Quando  $L_d = 5$ , la sovrastruttura è molto rigida, e quindi ci si avvicina al modello classico di BI. Al contrario, quando  $L_d = 1$ , la sovrastruttura è molto più deformabile<sup>11</sup> e l'effetto BI ne risente. Tale risultato era già stato evidenziato da [65] nel caso di edifici a torre.

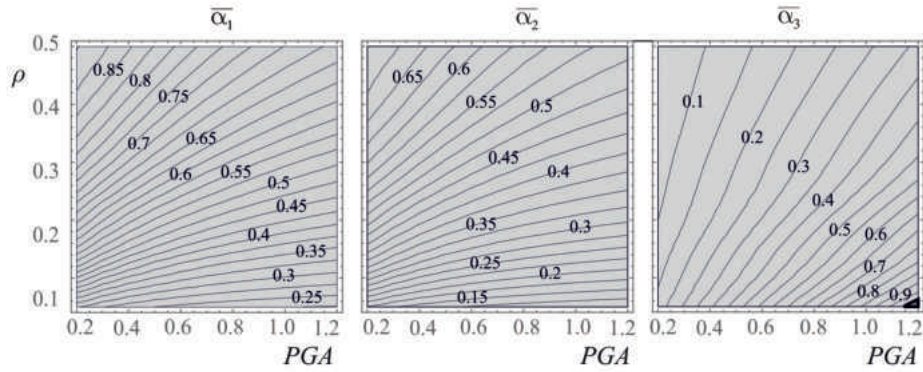
La Fig. 2.32 mostra le mappe di guadagno medie relative a  $L_d = 3$  e  $\Psi = 0.75$ . Una diretta comparazione delle mappe con  $L_d = 3$  di Fig. 2.31 e di Fig. 2.32 consente di valutare l'effetto di  $\Psi$ <sup>12</sup>. Per quanto riguarda il coefficiente  $\bar{\alpha}_1$ , si osserva che in Fig. 2.32 la zona grigio scura diventa più ampia. Pertanto valori inferiori di  $\Psi$  consentono di avere un raggio più ampio di utilizzo. Anche la performance massima nel caso di  $\Psi = 0.25$  è superiore, infatti si ha  $\bar{\alpha}_1 = 0.55$  in opposizione ad  $\bar{\alpha}_1 = 0.65$  per  $\Psi = 0.75$ . Nel caso di  $\bar{\alpha}_2$ , la differenza tra le mappe è alquanto modesta. Osservando le mappe  $\bar{\alpha}_3$  si riscontra che valori più bassi di  $\Psi$ , ovvero cicli di isteresi più ampi, riducono sostanzialmente gli spostamenti. Difatti la mappa  $\bar{\alpha}_3$  si trova sempre sotto l'unità per  $\Psi = 0.25$  mentre vi è una zona grigia scura quando  $\Psi = 0.75$ .

<sup>10</sup>Il rapporto di massa del TMD è definito come  $\mu = m_2/m_1$ .

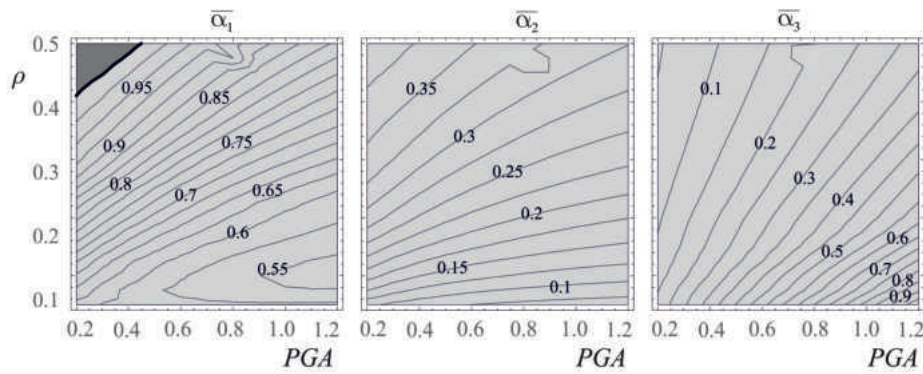
<sup>11</sup>La maggiore deformabilità è dovuta al fatto che la sovrastruttura è composta da 5 piani.

<sup>12</sup>Si ricorda che  $\Psi$  è il rapporto tra la rigidezza post-snervamento e la rigidezza elastica della disconnessione.

*Piano di discontinuità - 1° piano*



*Piano di discontinuità - 3° piano*



*Piano di discontinuità - 5° piano*

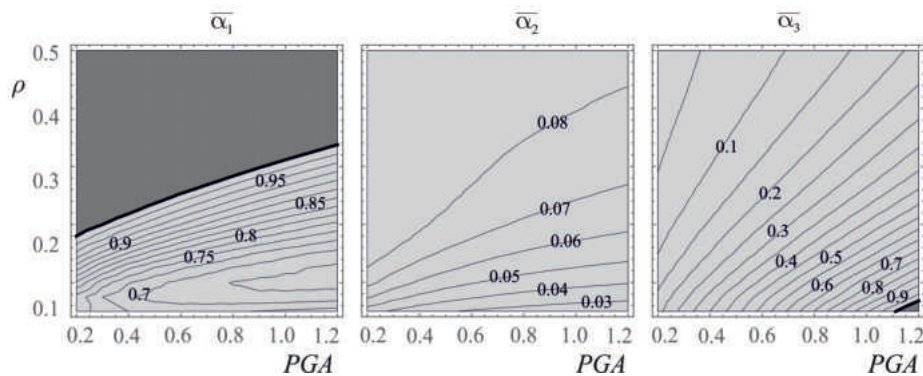
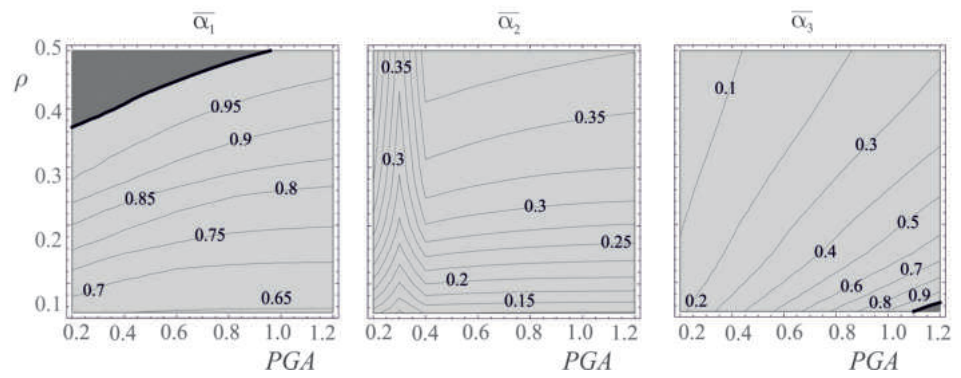


Fig. 2.31: Mappe di guadagno medie per diversi valori del piano di discontinuità ( $\Psi = 0.25$ ).

*Piano di discontinuità - 3° piano*



**Fig. 2.32:** Mappe di guadagno medie per  $L_d = 3$  ( $\Psi = 0.75$ ).

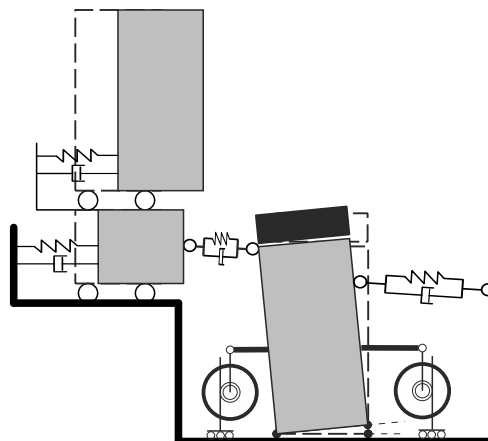
# MIGLIORAMENTO SISMICO DI EDIFICI INTELAIATI ATTRAVERSO L'ACCOPPIAMENTO CON UNA ROCKING WALL

---

## Abstract

In this chapter a coupled system between two different types of structures is investigated. A frame structure is coupled to a rocking block in order to reduce the displacements of the frame. The block is smaller of the frame structure and the visco-elastic connection connects the block to the lower storey of the frame. This study is divided in three parts:

- Investigation of the mechanical behaviour of the system and identification of the design parameters;
- Evaluation of the design parameters of the coupling able to maximize the reduction of the displacement to both lower and upper storeys;
- Improvement of the system in order to increase the performances of the coupling and to reduce the visual impact of the protection strategy.





# MIGLIORAMENTO SISMICO DI EDIFICI INTELAIATI ATTRAVERSO L'ACCOPPIAMENTO CON UNA ROCKING WALL

---

## Sommario

In questo capitolo è riportata l'analisi e lo sviluppo di un sistema accoppiato. L'accoppiamento è realizzato tra due tipologie strutturali completamente diverse. Da una parte abbiamo la struttura intelaiata che si vuole proteggere, dall'altra invece abbiamo un blocco rigido. Il blocco rigido è di dimensioni inferiori della struttura e pertanto il collegamento, assunto visco-elastico, può essere realizzato solo ai piani inferiori del telaio. Lo studio è articolato in tre parti:

- Studiare il comportamento meccanico del sistema e identificare i parametri di progetto principali;
- valutare i parametri di progetto dell'accoppiamento che minimizzino la risposta del telaio non solo al livello della connessione, ma anche ai livelli superiori;
- ottimizzare il sistema in modo da massimizzare le prestazioni e riducendo l'impatto visivo dell'intervento.

### 3.1 Accoppiamento tra strutture intelaiate e rocking wall

In questa tesi si vuole valutare la capacità dell'accoppiamento di una struttura con una rocking wall al fine di minimizzare la risposta sismica. Questa tipologia di intervento può essere applicata sia a edifici di nuova costruzione che al retrofit di edifici esistenti. Rispetto a [80, 81] dove la rocking wall ha le stesse dimensioni della struttura ed è connessa rigidamente ad essa ad ogni piano, in questa tesi la rocking wall è connessa solamente al primo o al secondo piano dell'edificio. Il vantaggio di questa tipologia di intervento risiede nel fatto che non sono generalmente richieste modifiche alla struttura che si vuole proteggere, ma d'altra parte è necessario avere a disposizione un piano interrato per nascondere la rocking wall o dover accettare una parete che copre parzialmente l'edificio. Inoltre, un blocco di dimensioni inferiori presenta meno rischi per l'esterno in caso di ribaltamento. Tuttavia, al fine di garantire la massa necessaria al blocco per mitigare sufficientemente le vibrazioni dell'edificio, può essere necessario posizionare il blocco sotto il livello di fondazione. Lo studio del sistema è svolto attraverso l'ausilio di modelli archetipi. La struttura a telaio è rappresentata da un modello equivalente ([5, 6]) a due gradi di libertà mentre il blocco è descritto dal modello di Housner [31]. Le equazioni del moto, ottenute attraverso un approccio lagrangiano, sono non lineari in quanto le equazioni di rocking sono non lineari. Sono poi svolte analisi parametriche e i risultati sono comparati con quelli ottenuti dalla stessa struttura non accoppiata, così da valutarne l'efficacia.

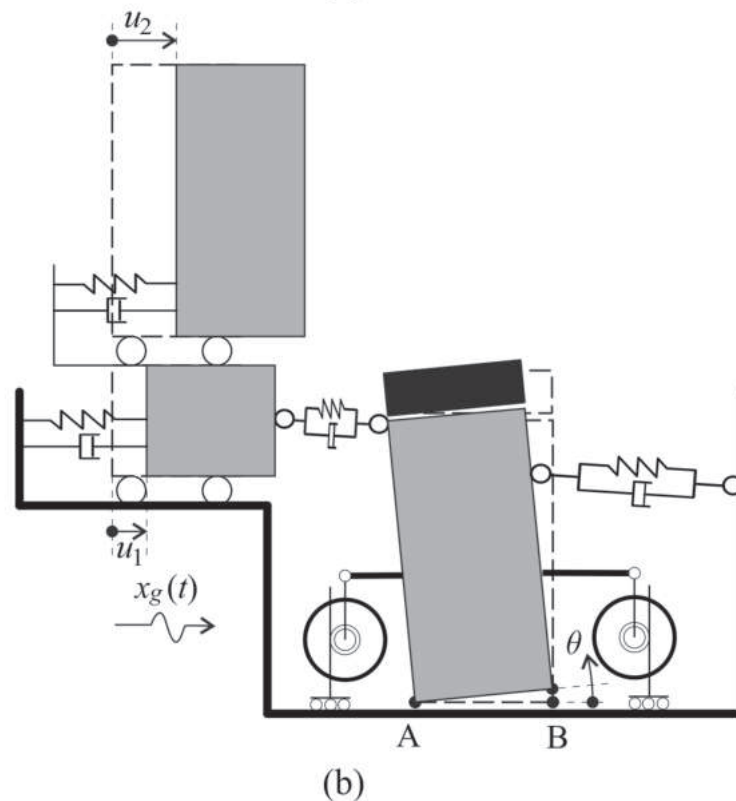
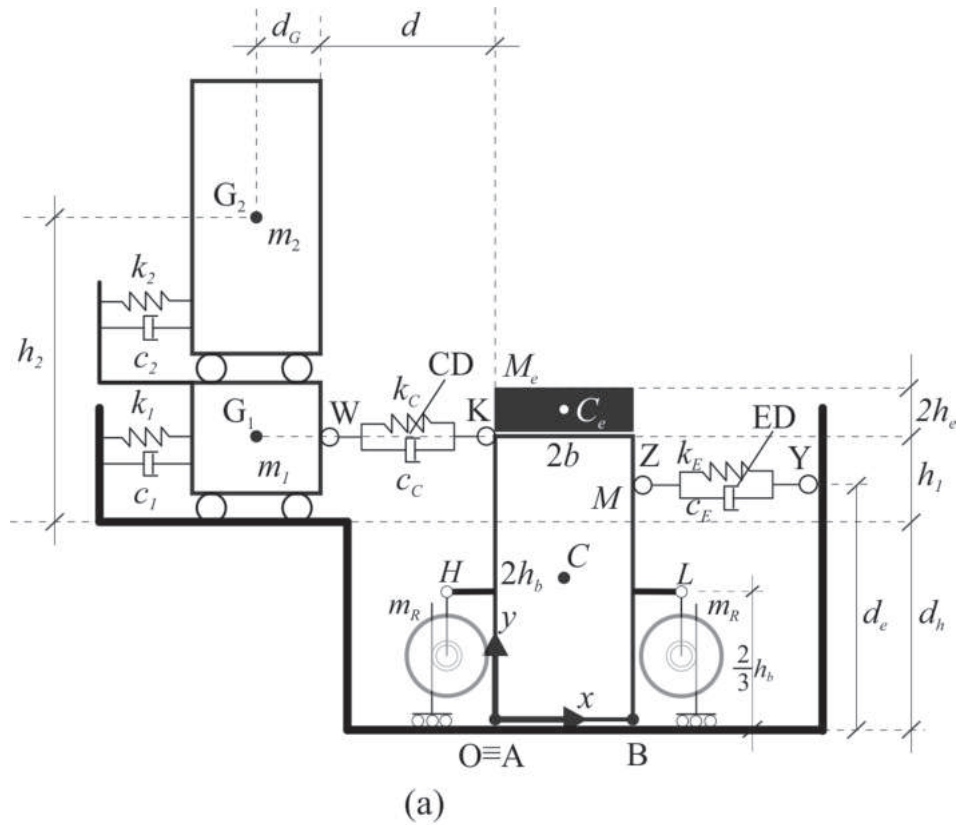
### 3.2 Lo schema meccanico

Lo schema meccanico dell'accoppiamento è rappresentato in Fig. 3.1a. Il telaio è modellato con un sistema equivalente a due gradi di libertà. La procedura di equivalenza è descritta in Appendice A.1. Si assume che il blocco non possa scorrere e quindi viene utilizzata la formulazione classica di Housner. Il blocco viene connesso alla struttura attraverso un dispositivo viscoelastico (CD). La parte di telaio sotto il piano di connessione è denominata sottostruttura mentre la parte di telaio sopra il piano di connessione è denominata sovrastruttura. Pertanto il sistema accoppiato è caratterizzato da tre parametri lagrangiani: lo spostamento della sottostruttura  $u_1$  è

lo spostamento del piano dove il telaio è connesso al blocco,  $u_2$  è lo spostamento della sovrastruttura ovvero dell'ultimo piano dell'edificio mentre  $\theta$  è la rotazione del blocco (Fig. 3.1b). In seguito per semplicità  $u_1$  verrà chiamato spostamento della sottostruttura e  $u_2$  spostamento della sovrastruttura. Sulla testa del blocco è presente una massa concentrata  $M_e$  che permette di aumentare l'inerzia del blocco. Ai lati del blocco sono presenti due dispositivi inerter, la cui massa apparente è  $m_R$ , che hanno uno scopo simile alla massa concentrata, ovvero aumentare l'inerzia del blocco. Inoltre, un dispositivo viscoelastico connette il blocco al terreno (ED). In questa tesi, un moto alla base  $x_g(t)$  è considerato come eccitazione esterna.

Il sistema meccanico è rappresentato in Fig. 3.1. Il blocco è connesso alla struttura attraverso un organo visco-elastico di accoppiamento (CD - dispositivo di accoppiamento) e al terreno con un secondo organo visco-elastico (ED - dispositivo esterno). Il blocco ha massa  $M = \rho \times 2b \times 2h_b \times s$ , dove  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  e  $s$  è la dimensionale ortogonale al piano della figura. Il blocco è connesso alla struttura, rappresentata da un modello equivalente a due gradi di libertà. La porzione di struttura sotto la connessione è denominata "sottostruttura" mentre la porzione al di sopra della connessione è denominata "sovrastruttura". L'utilizzo di un modello equivalente a due gradi di libertà consente di descrivere sia lo spostamento della sottostruttura che il drift nella sovrastruttura. Le caratteristiche meccaniche del sistema vengono dalla procedura di equivalenza descritta in ([5, 6]) e riportate, in versione estesa, in appendice A.1. Le dimensioni geometriche  $h_1$  e  $h_2$  sono mostrate in Fig. 3.1. Per descrivere il comportamento della rocking wall viene utilizzata la formulazione classica di Housner, pertanto si assume che il blocco non possa scorrere. Questa non è un'ipotesi lontana dalla realtà, in quanto si può vincolare il blocco a livello di fondazione così impedendo lo scorrimento. Pertanto sono necessari tre parametri lagrangiani per descrivere il sistema: lo spostamento della sottostruttura  $u_1$ , lo spostamento della sovrastruttura  $u_2$  e l'angolo di rocking del blocco  $\theta$ . Questi parametri lagrangiani e le loro direzioni di positività sono mostrate in Fig. 3.4b.

Per descrivere il comportamento del sistema sono necessari due set da tre equazioni ognuno dove ogni set descrive il moto del sistema quando il blocco ruota intorno al punto A o al punto B. Le equazioni sono ottenute attraverso un procedimento lagrangiano e quindi è necessario individuare le posizioni dei centri di massa dei corpi. Si consideri un sistema di riferimento in O, inizialmente coincidente con il punto A del blocco. Le posizioni dei centri di massa  $G_1$  e  $G_2$  relative ai due gradi di libertà del telaio sono:



**Fig. 3.1:** (a) Caratteristiche geometriche e meccaniche del modello generalizzato, (b) Parametri lagrangiani e direzioni di positività.

$$x_{G1}(t) = \begin{Bmatrix} x_g(t) - d - d_G + u_1(t) \\ d_h + h_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad x_{G2}(t) = \begin{Bmatrix} x_g(t) - d - d_G + u_2(t) \\ d_h + h_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Le posizioni dei centri di massa  $C$  del blocco e  $C_e$  della massa aggiunta intorno allo spigolo  $A$  durante il movimento di rocking sono dati da:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_C(t) &= \begin{Bmatrix} x_g(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ h_b \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{x}_{C_e}(t) &= \begin{Bmatrix} x_g(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ 2h_b + h_e \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove la matrice in Eq. (3.2) è il tensore rotazione del blocco. L'energia cinetica del sistema meccanico durante il movimento di rocking del blocco intorno al vertice sinistro  $A$  è:

$$T_A = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^2 m_i (\dot{\mathbf{x}}_{Gi}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{Gi}(t)) + J_C (\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}}(t)) + M (\dot{\mathbf{x}}_C(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}_C(t)) + T_{Me} \right] \quad (3.3)$$

dove  $T_{Me} = M_e (\dot{\mathbf{x}}_{C_e}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}_{C_e}(t))$  è il contributo dato dalla massa aggiunta sulla testa,  $\dot{\boldsymbol{\theta}}(t) = \{0, 0, \dot{\theta}(t)\}^T$  e  $J_C$  è l'inerzia polare del blocco rispetto al suo centro di massa. La massa aggiunta  $M_e$  è considerata concentrata. In modo da valutare l'energia potenziale quando il blocco oscilla intorno ad  $A$ , bisogna valutare il vettore distanza tra le coppie di punti  $W$  e  $K$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_W(t) &= \begin{Bmatrix} -d + x_g(t) + u_1(t) \\ d_h + h_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{x}_Y(t) = \begin{Bmatrix} x_g(t) + 2b + a \\ d_e \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{x}_K(t) &= \begin{Bmatrix} x_g(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ d_h + h_1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \\ \mathbf{x}_Z(t) &= \begin{Bmatrix} x_g(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & -\sin\theta(t) & 0 \\ \sin\theta(t) & \cos\theta(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2b \\ d_e \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

I vettori distanza tra le coppie di punti sono:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{WK}(t) = \mathbf{x}_K(t) - \mathbf{x}_W(t) &= \begin{Bmatrix} d - \sin\theta(t)(d_h + h_1) - u_1(t) \\ -d_h - h_1 + \cos\theta(t)(d_h + h_1) \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mathbf{x}_{ZY}(t) = \mathbf{x}_Y(t) - \mathbf{x}_Z(t) &= \begin{Bmatrix} a + 2b - 2b\cos\theta(t) + d_e\sin\theta(t) \\ d_e - d_e\cos\theta(t) - 2b\sin\theta(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}^T$  è il vettore unità dell'asse  $y$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_C = \{b, h_b, 0\}^T$  e  $\bar{\mathbf{x}}_{C_e} = \{b, 2h_b + h_e, 0\}^T$  sono rispettivamente le posizioni iniziali del centro di massa del blocco e della massa aggiunta in testa. Poiché sono costanti non svolgono alcun ruolo nelle equazioni del moto. Il lavoro virtuale delle forze non conservative relative a  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_C$  è:

$$\delta W_A = - [c_1 \dot{u}_1(t) \delta u_1(t) + c_2 (\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) (\delta u_2(t) - \delta u_1(t))] - [c_C (\dot{x}_{WK}(t) \cdot \delta x_{WK}(t))] \quad (3.6)$$

L'energia potenziale del sistema è data da

$$V_A = [Mg (\mathbf{x}_C(t) - \bar{\mathbf{x}}_C) + M_e g (\mathbf{x}_{C_e}(t) - \bar{\mathbf{x}}_{C_e})] \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{2} [k_1 u_1(t)^2 + k_2 (u_2(t) - u_1(t))^2] + \frac{1}{2} \left[ k_C \left( \sqrt{\mathbf{x}_{WK}(t) \cdot \mathbf{x}_{WK}(t)} - d \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ k_E \left( \sqrt{\mathbf{x}_{ZY}(t) \cdot \mathbf{x}_{ZY}(t)} - a \right)^2 \right] \quad (3.7)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}^T$  è il vettore unità dell'asse  $y$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_C = \{b, h_b, 0\}^T$  e  $\bar{\mathbf{x}}_{C_e} = \{b, 2h_b + h_e, 0\}^T$  sono rispettivamente le posizioni iniziali del centro di massa del blocco e della massa aggiunta in testa. Poiché sono costanti non svolgono alcun ruolo nelle equazioni del moto. Il lavoro virtuale delle forze non conservative relative a  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_E$  e  $c_C$  è:

$$\delta W_A = - [c_1 \dot{u}_1(t) \delta u_1(t) + c_2 (\dot{u}_2(t) - \dot{u}_1(t)) (\delta u_2(t) - \delta u_1(t))] - [c_C (\dot{x}_{WK}(t) \cdot \delta x_{WK}(t)) + c_E (\dot{x}_{ZY}(t) \cdot \delta x_{ZY}(t))] \quad (3.8)$$

Come mostrato in [58] lo scopo di ID<sub>S</sub> la cui massa apparente è  $m_{R1}$  (Eq. (1.43)) è quello di incrementare la massa totale  $\tilde{m}_1$  associata alla sottostruttura:

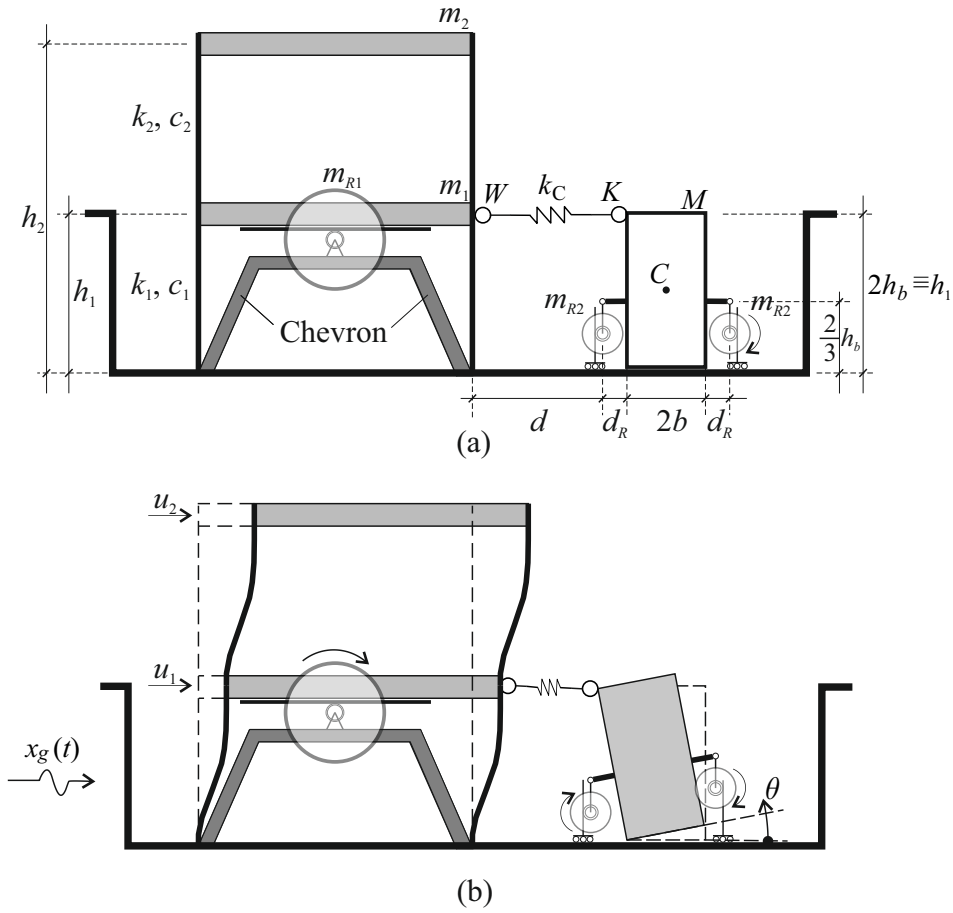
$$\tilde{m}_1 = m_1 + m_{R1} \quad (3.9)$$

dove  $m_1$  è la massa reale della sottostruttura del modello archetipo a 2-GDL (vedi Fig. 3.25a). Gli effetti di ID<sub>B</sub> su un blocco isolato sono stati studiati in [60]<sup>1</sup>. Si assume che la forza resistente degli inerter resti sempre verticale. Tale forza è proporzionale all'accelerazione verticale dei punti ai quali l'inerter è connesso al blocco.

Con riferimento a Fig. 3.2b, quando il blocco oscilla intorno al vertice sinistro  $A$  ( $\theta > 0$ ), la forza resistente  $F_L$  dovuta all'inerter applicato a destra del blocco sul punto  $L$  è pari a

$$F_L = -m_R \left[ (2b + d_R) \cos(\theta) - \frac{2}{3} h_b \sin(\theta) \right] \ddot{\theta} \quad (3.10)$$

<sup>1</sup>Una breve discussione su questi effetti è riportata nell'introduzione.



**Fig. 3.2:** (a) Schema di accoppiamento e (b) parametri lagrangiani del modello archetipo e verso di positività.

dove  $[(2b + d)\cos(\theta) - \frac{2}{3}h_b \sin(\theta)]$  è la componente orizzontale del vettore posizione  $\mathbf{R}_{AL}$  nella generica configurazione ruotata del blocco. L'inerzia rotazionale  $M_A$  associata ad  $F_L$  può essere ottenuta valutando il momento di tale forza rispetto al punto di oscillazione  $A$ . Il suo valore assoluto è

$$|M_A| = m_R \left[ (2b + d_R)\cos(\theta) - \frac{2}{3}h_b \sin(\theta) \right]^2 \ddot{\theta} \quad (3.11)$$

Quando il blocco oscilla intorno al vertice destro  $B$ , ( $\theta < 0$ ) l'inerzia rotazionale  $M_B$  è fornita da

$$|M_B| = m_R \left[ (2b + d_R)\cos(\theta) + \frac{2}{3}h_b \sin(\theta) \right]^2 \ddot{\theta} \quad (3.12)$$

In queste espressioni è considerato solo il contributo inerziale dovuto all'inertor posizionato sul vertice opposto rispetto a quello che oscilla, poiché si assume che l'inertor vicino allo spigolo che oscilla abbia uno spostamento e un'accelerazione trascurabile. Le equazioni lagrangiane del moto

possono essere ottenute da

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L_A}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \delta W_A(\delta q_i), \quad \forall \delta q_i \neq 0; (i = 1, 2, 3) \quad (3.13)$$

dove  $L_A = T_A - V_A$  è la funzione lagrangiana,  $(q_1, q_2, q_3) = (u_1, u_2, \theta)$  e  $(\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3) = (\delta u_1, \delta u_2, \delta \theta)$ .

$$\begin{aligned} & -k_C (d - (d_h + h_1) \sin \theta - u_1) \times Q_1 + \\ & c_C ((d_h + h_1) \theta' \cos \theta + \dot{u}_1) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + \\ & (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) + \underline{m_{R1}} \ddot{u}_1 = 0 \\ & \text{-----} \\ & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\ & \text{-----} \\ & k_C (d_h + h_1) ((u_1 - d) \cos \theta + (d_h + h_1) \sin \theta) \times Q_1 - \\ & \ddot{x}_g (\cos \theta (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) + b (M + M_e) \sin \theta) + \\ & b g (M + M_e) \cos \theta - g (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) + \\ & c_C (d_h + h_1) ((d_h + h_1) \dot{\theta} + \dot{u}_1 \cos \theta) + \\ & k_E \left( \sin \theta (2b(a + 2b) + d_e^2) + a d_e \cos \theta \right) \times Q_2 + c_E (4b + d_e)^2 \dot{\theta} + \\ & \left( J_A + \underline{m_{R2}} ((2b + d_R) \cos(\theta) - \frac{2}{3} h_b \sin(\theta))^2 \right) \ddot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

dove  $J_A = J_C + M(b^2 + h_b^2) + M_e(b^2 + (2h_b + h_e)^2)$  è l'inerzia polare totale del blocco e della massa aggiunta rispetto al vertice A mentre i termini sottolineati sono riferiti agli inerter. Le quantità  $Q_1$  e  $Q_2$  sono pari a

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{-d + \sqrt{d^2 - 2(d - u_1)h_1 \sin \theta - 2du_1 - 2h_1^2 \cos \theta + 2h_1^2 + u_1^2}}{\sqrt{d^2 - 2(d - u_1)h_1 \sin \theta - 2du_1 - 2h_1^2 \cos \theta + 2h_1^2 + u_1^2}} \\ & \text{-----} \\ Q_2 &= \frac{\left( \sqrt{a^2 - 2 \cos \theta (2b(a + 2b) + d_e^2) + 4ab + 2ad_e \sin \theta + 8b^2 + 2d_e^2 - a} \right)}{\sqrt{a^2 - 2 \cos \theta (2b(a + 2b) + d_e^2) + 4ab + 2ad_e \sin \theta + 8b^2 + 2d_e^2}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le equazioni del moto intorno al vertice B sono:

$$\begin{aligned}
 & k_C (2b \cos \theta - 2b - d + (d_h + h_1) \sin \theta + u_1) \times Q_3 + \\
 & c_C (\dot{\theta} ((d_h + h_1) \cos \theta - 2b \sin \theta) + \dot{u}_1) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - \\
 & c_2 \ddot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + (m_1 + \underline{m_{R1}}) (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & k_C \left( \sin \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + h_1 (2d_h + h_1) \right) \right) \times Q_2 - \\
 & k_C ((d - u_1) (d_h + h_1) \cos \theta) \times Q_4 + \\
 & c_C \left( \left( 4b^2 + (d_h + h_1)^2 \right) \dot{\theta} + \dot{u}_1(t) ((d_h + h_1) \cos \theta - 2b \sin \theta) \right) - \\
 & bg (M + M_e) \cos \theta + \ddot{x}_g (b (M + M_e) \sin \theta - (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) \cos \theta) - \\
 & g (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) \sin \theta_g + \\
 & d_e k_E (a \cos \theta + d_e \sin \theta) \times Q_4 + c_E d_e^2 \dot{\theta} + \\
 & \left( J_B + \underline{m_{R2}} \left( (2b + d_R) \cos(\theta) + \frac{2}{3} h_b \sin(\theta) \right)^2 \right) \ddot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 Q_3 &= \frac{-d + \sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta (2b(2b + d) - 2bu_1 + h_1^2) + 4bd - 4bu_1 + d^2 - 2(d - u_1) h_1 \sin \theta - 2du_1 + 2h_1^2 + u_1^2}}{\sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta (2b(2b + d) - 2bu_1 + h_1^2) + 4bd - 4bu_1 + d^2 - 2(d - u_1) h_1 \sin \theta - 2du_1 + 2h_1^2 + u_1^2}} \\
 Q_4 &= \frac{\left( \sqrt{a^2 + 2ad_e \sin \theta - 2d_e^2 \cos \theta + 2d_e^2} - a \right)}{\sqrt{a^2 + 2ad_e \sin \theta - 2d_e^2 \cos \theta + 2d_e^2}}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Poiché il blocco è simmetrico, allora  $J_A = J_B$ .

### 3.2.0.1 Uplift e condizioni di impatto

L'uplift del blocco intorno al vertice A si verifica quando il momento resistente  $M_R = Mgb$  dovuto al peso del blocco è più piccolo del momento di overturning  $M_O = -M\ddot{x}_g(t)h_b + [k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)$  dovuto alle forze inerziali e alle forze viscoelastiche dell'organo di accoppiamento CD. E' importante notare che fin quando il blocco non inizia ad oscillare, l'organo viscoelastico esterno (ED) non offre alcun contributo a  $M_O$ . Eguagliando i due momenti e semplificando, è possibile ottenere il valore dell'accelerazione capace di sollevare il blocco:

$$a_{UP} = \frac{(M + M_e)gb}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} + \frac{[k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} \quad (3.18)$$

In assenza di accoppiamento e massa in testa, si riottiene la formulazione classica dell'uplift per il blocco rigido. La condizione di uplift rispetto al vertice destro è data da

$$a_{UP} = -\frac{(M + M_e)gb}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} + \frac{[k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} \quad (3.19)$$

Durante il moto di rocking, quando la rotazione  $\vartheta(t)$  raggiunge lo zero, si verifica un impatto tra blocco e terreno. Le condizioni post-impatto del moto di rocking possono essere determinate assumendo che l'impatto avvenga istantaneamente, la posizione del corpo resti invariata, e il momento angolare venga mantenuto. Questa condizione può essere espressa come  $(J_O - 2bS_y)\dot{\vartheta}^- = J_O\dot{\vartheta}^+$ , dove  $J_O$  è l'inerzia polare del blocco rispetto ad uno dei due vertici alla base A or B;  $S_y = \pm Mb$  è il momento statico del blocco rispetto all'asse verticale passante attraverso uno dei due vertici alla base (dopo una piccola manipolazione algebrica la conservazione del momento angolare diventa come in [31]). Poichè il blocco è simmetrico allora  $J_O = J_A = J_B$ , quindi le condizioni di impatto che si riferiscono ad un blocco che dopo l'impatto si rialza intorno al vertice A o B sono uguali. Gli apici  $(\cdot)^-$  e  $(\cdot)^+$  indicano, rispettivamente, le quantità prima e dopo l'impatto. Dalla conservazione del momento angolare, il massimo valore della velocità angolare dopo l'impatto  $\dot{\vartheta}^+$  può essere ottenuta come una funzione della velocità angolare prima dell'impatto  $\dot{\vartheta}^-$ . Il valore della velocità dopo l'impatto che è considerata nelle simulazioni numeriche è uguale a  $\dot{\vartheta}^+ = \eta [(J_O - 2bS_y) / J_O] \dot{\vartheta}^-$  dove  $\eta$  è un coefficiente minore dell'unità, introdotto per includere un ulteriore perdita di energia meccanica. Nelle analisi, il valore di  $\eta$  è fisso ( $\eta = 0.9$ ) ([80], [81]).

### 3.2.0.2 Integrazione numerica

L'integrazione numerica delle equazioni del moto (3.14) e (3.16), considerando le condizioni di uplift Eq. (3.18) e Eq. (3.19) e le condizioni di impatto è svolta attraverso un codice sviluppato con il software *Mathematica*<sup>®</sup>. La procedura è programmata per individuare, dal primo passo di integrazione, il raggiungimento della condizione di uplift espressa dalla (3.18) oppure (3.19). Fin quando queste condizioni non sono verificate, solo le equazioni del moto relative al sistema a due gradi di libertà sono integrate. Poi,

quando il blocco si solleva a seguito del soddisfacimento delle equazioni Eqs. (3.18) o (3.19), l'algoritmo procede con l'integrazione delle equazioni Eq. (3.14) per il rocking intorno al vertice  $A$  oppure Eq. (3.16) per il rocking intorno al vertice  $B$ , assumendo come condizioni iniziali per il sistema 2-DOF i valori  $u_1, u_2$  and  $\dot{u}_1, \dot{u}_2$  ottenuti alla fine del precedente passo di integrazione.

Dopo ogni passo di integrazione  $i$ , è operato un controllo sull'angolo di rocking  $\vartheta$ . Se  $\vartheta_{t_{i-1}} \times \vartheta_{t_i} < 0$ , vuol dire che si è verificato un impatto e l'algoritmo passa da un set di equazioni di rocking all'altro riducendo la velocità angolare dopo l'impatto  $\dot{\vartheta}^+ = \eta [(J_O - 2b S_y) / J_O] \dot{\vartheta}^-$ . L'integrazione viene arrestata se, all' $i$ -simo passo, si verifica una di queste due condizioni. Nella prima condizione, l'integrazione numerica viene arrestata quando viene raggiunto il tempo finale  $t_{max}$ ; la seconda condizione arresta l'integrazione se si verifica un ribaltamento del blocco.

Nello specifico, il codice è sviluppato in ambiente *Mathematica*<sup>®</sup> e si fa uso della funzione integrata nel programma *NDSolve*<sup>2</sup> la quale integra numericamente le equazioni del moto. La funzione *NDSolve* trasforma automaticamente le equazioni Eq. (3.14) e Eq. (3.16) in un sistema in forma normale di equazioni ordinarie al primo ordine. Il classico metodo di Runge-Kutta al quarto ordine è selezionato come metodo di integrazione. Il passo temporale usato nell'integrazione numerica è  $\Delta t = 0.001$  s, il quale assicura una buona precisione nella valutazione degli istanti in cui si verifica un impatto.

### 3.3 Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno

Al fine di indagare il comportamento del sistema accoppiato, viene svolta un estensiva analisi parametrica integrando numericamente le equazioni del moto. Nelle analisi svolte, il blocco non eccede mai l'angolo critico  $\alpha_C = \arctan(b/h_b)$  che causerebbe il ribaltamento del blocco. In altre parole, il baricentro  $C$  del blocco è sempre dentro la proiezione verticale della base e il ribaltamento non si verifica. Nelle analisi svolte, il modello 2-GDL si riferisce a due edifici intelaiati con differenti caratteristiche. Il primo è un edificio di dimensioni ridotte con tre piani, aventi  $100,00$   $m^2$  di superficie. Il secondo edificio ha dimensioni maggiori, in quanto ha cinque piani, dove ogni piano ha una superficie di  $250,00$   $m^2$ . Lo spostamento  $u_1$  si riferisce al

---

<sup>2</sup><http://www.wolfram.com/mathematica/>

Piani	Piano Conness.	Superficie	Massa Piano	Altezza interpiano
3	1	100 m <sup>2</sup>	120.6x10 <sup>3</sup> kg	3 m
5	2	250 m <sup>2</sup>	301.5x10 <sup>3</sup> kg	3 m

**Tabella 3.1:** Caratteristiche dei due edifici

Piani	$k_1$ (N/m)	$k_2$ (N/m)	$m_1$ (kg)	$m_2$ (kg)	$\omega_{unc}$ (rad/s <sup>-1</sup> )	$\zeta$
3	2.19x10 <sup>8</sup>	9.40x10 <sup>7</sup>	120.6x10 <sup>3</sup>	241.2x10 <sup>3</sup>	16.02	0.05
5	7.64x10 <sup>8</sup>	1.82x10 <sup>8</sup>	241.2x10 <sup>3</sup>	361.8x10 <sup>3</sup>	10.65	0.05

**Tabella 3.2:** Caratteristiche dei modelli archetipi a due gradi di libertà (  $\omega_{unc}$  è la frequenza circolare del primo modo del sistema non accoppiato.)

piano dove è posizionata la connessione con il blocco (sottostruttura). Lo spostamento  $u_2$  si riferisce allo spostamento dell'ultimo piano della struttura (sovrastuttura). I valori di rigidezza  $k_1$  e  $k_2$  sono valutati usando la procedura di equivalenza mostrata in [5, 6] e riportata in forma estesa in A.1. In tabella 3.1 sono mostrate le caratteristiche principali dei due edifici considerati, laddove la tabella 3.2 mostra le principali caratteristiche dei rispettivi modelli archetipi a 2-GDL.

Lo spostamento  $u_1$  e il drift superiore  $u_2 - u_1$  sono usati come indicatori per valutare la prestazione dinamica del sistema. Pertanto si introducono due coefficienti di guadagno [5, 6]:

$$\alpha_1 = \frac{\max |u_1(t)|}{\max |\tilde{u}_1(t)|}, \quad \alpha_2 = \frac{\max |u_2(t) - u_1(t)|}{\max |\tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_1(t)|} \quad (3.20)$$

dove gli spostamenti  $\tilde{u}_1$  e  $\tilde{u}_2$  si riferiscono al telaio senza accoppiamento. Se i parametri della (3.20) sono inferiori all'unità, allora l'accoppiamento della struttura con il blocco conduce ad un incremento delle prestazioni. Per individuare i valori dei parametri che massimizzano le prestazioni dell'accoppiamento, viene svolta un'estesa analisi parametrica i cui risultati sono riassunti in mappe di guadagno, che rappresentano i valori di  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  in specifici piani di parametri.

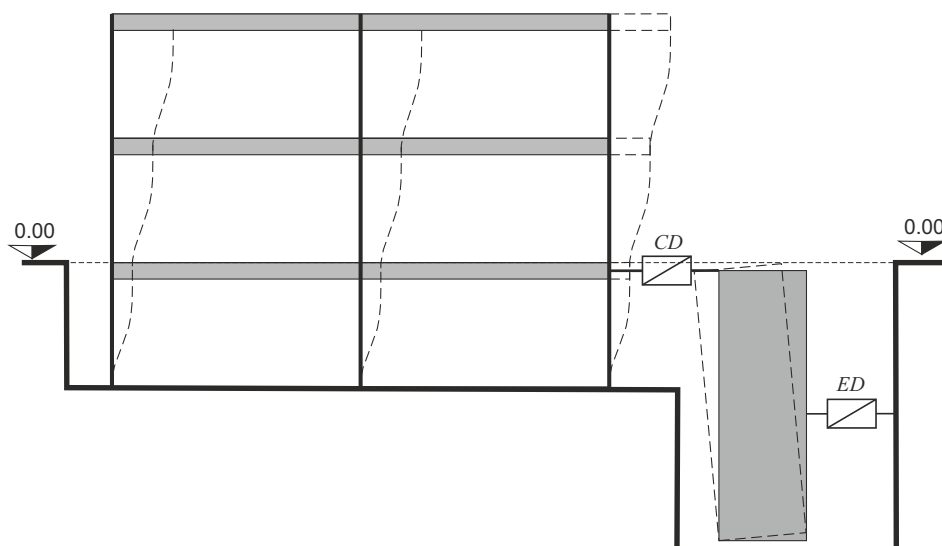
### 3.4 Il comportamento qualitativo del sistema accoppiato

In questa sezione si valuta uno schema semplificato del modello proposto. In questa fase non si considera la massa in testa ( $M_e = 0$ ) e gli inerter ( $m_{R1} = m_{R2} = 0$ ). Lo scopo di questa prima analisi è quella di individuare i parametri fondamentali del sistema accoppiato ed evidenziarne il comportamento principale. Per raggiungere questo obiettivo, si sono svolte

analisi parametriche in un ampio intervallo di parametri considerando una eccitazione esterna di tipo armonico. Sono stati considerati diversi valori della frequenza circolare dell'eccitazione e i risultati ottenuti sono poi confrontati con un'analisi modale svolta sul sistema linearizzato, nell'ipotesi di piccoli spostamenti. Questo consente di individuare due tipologie differenti di comportamento, a seconda della presenza o meno del dispositivo di ancoraggio al terreno ED.

### 3.4.1 Il sistema meccanico e le equazioni del moto

Il sistema meccanico è rappresentato in Fig. 3.3. Il blocco è connesso alla struttura attraverso un organo visco-elastico di accoppiamento (CD - coupling device) e al terreno con un secondo organo visco-elastico (ED - external device). Il blocco ha massa  $M = \rho \times 2b \times 2h_b \times s$ , dove  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$  e  $s$  è la dimensionale ortogonale al piano della figura. Tale sistema è ottenuto da quello di Fig. 3.1 dove si ignorano gli effetti della massa aggiunta ( $M_e = 0$ ) e degli inerter ( $m_{R1} = m_{R2} = 0$ ).



**Fig. 3.3:** Schema meccanico del sistema accoppiato telaio e rocking wall (CD: organo viscoelastico di accoppiamento - ED: organo viscoelastico di collegamento tra il blocco e il terreno).

La Fig. 3.4 mostra quindi il modello meccanico e le direzioni di positività dei parametri lagrangiani.

In riferimento allo schema di Fig. 3.3, le equazioni del moto che descrivono il comportamento del sistema quando il blocco oscilla intorno al



possono essere ottenute in maniera analoga e sono:

$$\begin{aligned}
 & k_C (2b \cos \theta - 2b - d + (d_h + h_1) \sin \theta + u_1) \times Q_3 + \\
 & c_C (\dot{\theta} ((d_h + h_1) \cos \theta - 2b \sin \theta) + \dot{u}_1) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - \\
 & c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & d_e k_E (a \cos \theta + d_e \sin \theta) \times Q_4 + \\
 & k_C \left( \sin \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + h_1 (2d_h + h_1) \right) \right) \times Q_3 - \\
 & k_C ((d - u_1) (d_h + h_1) \cos \theta) \times Q_3 + \\
 & 4b^2 c_C \dot{\theta} + \dot{\theta} J_B - 2bc_C \sin \theta \dot{u}_1 - bgM \cos \theta + bM \sin \theta \ddot{x}_g + c_E d_e^2 \dot{\theta} + \\
 & c_C d_h^2 \dot{\theta} + 2c_C d_h h_1 \dot{\theta} + c_C d_h \cos \theta \dot{u}_1 + c_C h_1^2 \dot{\theta} + c_C h_1 \cos \theta \dot{u}_1 - \\
 & gh_b M \sin \theta - h_b M \cos \theta \ddot{x}_g = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

dove

$$\begin{aligned}
 Q_3 = & \frac{\left( \sqrt{\frac{8b^2 - 2 \cos \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + h_1 (2d_h + h_1) \right) + 4bd - 4bu_1 + d^2 - 2(d - u_1)(d_h + h_1) \sin \theta - 2du_1 + 2d_h^2 + 4d_h h_1 + 2h_1^2 + u_1^2}{d}} \right)}{\sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + 2d_h h_1 + h_1^2 \right) + 4bd - 4bu_1 + d^2 - 2(d - u_1)(d_h + h_1) \sin \theta - 2du_1 + 2d_h^2 + 4d_h h_1 + 2h_1^2 + u_1^2}} \\
 Q_4 = & \frac{\left( \sqrt{a^2 + 2ad_e \sin \theta - 2d_e^2 \cos \theta + 2d_e^2 - a} \right)}{\sqrt{a^2 + 2ad_e \sin \theta - 2d_e^2 \cos \theta + 2d_e^2}}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

### 3.4.1.1 Uplift e condizioni di impatto

Le condizioni di impatto sono ricavate a partire dalla (3.18) e dalla (3.19) tenendo conto che in questo caso non è presente la massa aggiunta ( $M_e = 0$ ). L'accelerazione di uplift risulta essere:

$$\ddot{x}_g = \frac{g}{\lambda} + \frac{[k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)}{M h_b} \tag{3.25}$$

dove  $\lambda = h_b / b$  è la snellezza del blocco. In assenza di CD, la condizione di sollevamento è la stessa del blocco isolato. La condizione di uplift quando il blocco si alza rispetto al vertice  $B$  è espressa da

$$\ddot{x}_g = -\frac{g}{\lambda} + \frac{[k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)}{M h_b} \tag{3.26}$$

### 3.4.1.2 Equazioni linearizzate

Per una corretta interpretazione dei risultati ottenuti si confrontano questi ultimi con i risultati ottenuti da una formulazione linearizzata basata sull'ipotesi di piccole rotazioni e bassi valori di smorzamento per gli organi viscoelastici. Le equazioni del moto linearizzate del sistema accoppiato, non smorzato, omogeneo sono ottenute espandendo le equazioni non lineari del moto (3.21) in serie di McLaurin fino al primo ordine rispetto ai parametri lagrangiani  $u_1$ ,  $u_2$  e  $\theta$ . Le equazioni (3.27) si riferiscono ad un blocco che fa rocking intorno al vertice A:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

dove

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_C & -k_2 & (d_h + h_1)k_C \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ (d_h + h_1)k_C & 0 & -h_b Mg + d_c^2 k_E + (d_h + h_1)^2 k_C \end{bmatrix}$$

Le frequenze e i modi del sistema accoppiato sono ottenute risolvendo il seguente problema agli autovalori:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (3.29)$$

dove  $\omega$  è l'autovalore (frequenza circolare linearizzata) del sistema e  $\mathbf{U}$  è l'autovettore (modo di vibrazione). Si osserva che per dimensioni del blocco di interesse pratico, la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  è sempre definita positiva. Il sistema linearizzato ammette tre frequenze (reali e positive) e tre modi. Le equazioni linearizzate del moto che si riferiscono ad un moto di rocking intorno al vertice  $B$  sono esattamente uguali a Eq. (3.27) e Eq. (3.28). Formalmente, solo il termine  $J_A$  nella matrice di massa  $\mathbf{M}$  (3.28) cambia in  $J_B$ , ma poichè il blocco considerato è simmetrico, allora  $J_A = J_B$ , ovvero i valori di inerzia polare del blocco intorno ai due vertici alla base sono identici.

### 3.4.1.3 Eccitazione esterna

L'eccitazione armonica usata nelle analisi è  $\ddot{x}_g(t) = A_s \sin(\Omega t)$ ,  $0 \leq t \leq t_{\max}$ , dove  $\Omega = 2\pi/T_s$  è la frequenza circolare e  $T_s$  è il periodo dell'armonica,  $A_s$  è la sua ampiezza e  $t_{\max}$  è il tempo massimo usato nelle integrazio-

ne numeriche ( $t_{\max} = 25 T_s$ ). Poichè il sistema meccanico è non lineare, il suo comportamento dipende dall'ampiezza  $A_s$  dell'eccitazione. Tuttavia, a seguito di test preliminari svolti sul sistema, si è visto che per valori di  $\theta$  molto più piccoli dell'angolo critico  $\alpha_C$ , la dipendenza del moto dall'ampiezza della forzante è minima. Pertanto nelle simulazioni, l'ampiezza della forzante è fissa e pari a  $A_s = 5.0 m/s^2$ .

### 3.4.2 Il ruolo del dispositivo viscoelastico di accoppiamento (CD)

La prima delle analisi svolte investiga l'influenza del dispositivo viscoelastico di accoppiamento CD (Fig. 3.3). In questa analisi il dispositivo ED non è presente ( $k_E = C_E = 0$ ). Per una migliore comprensione dei risultati, è adottata la seguente parametrizzazione:

$$k_C = \beta k_1 \quad (3.30)$$

I parametri variabili dell'analisi sono la base del blocco  $2b$  e il rapporto di rigidità  $\beta$  del dispositivo di accoppiamento (3.30). L'intervallo dei parametri indagato spazia da  $2b = 0.2$  m a  $2b = 2.0$  m per la base e da  $\beta = 0.1$  a  $\beta = 9$  per il rapporto di rigidità di accoppiamento. L'intervallo di valori scelti per la base corrisponde ad una massa del blocco che varia dal 4% al 40% della massa totale del sistema a due gradi di libertà.

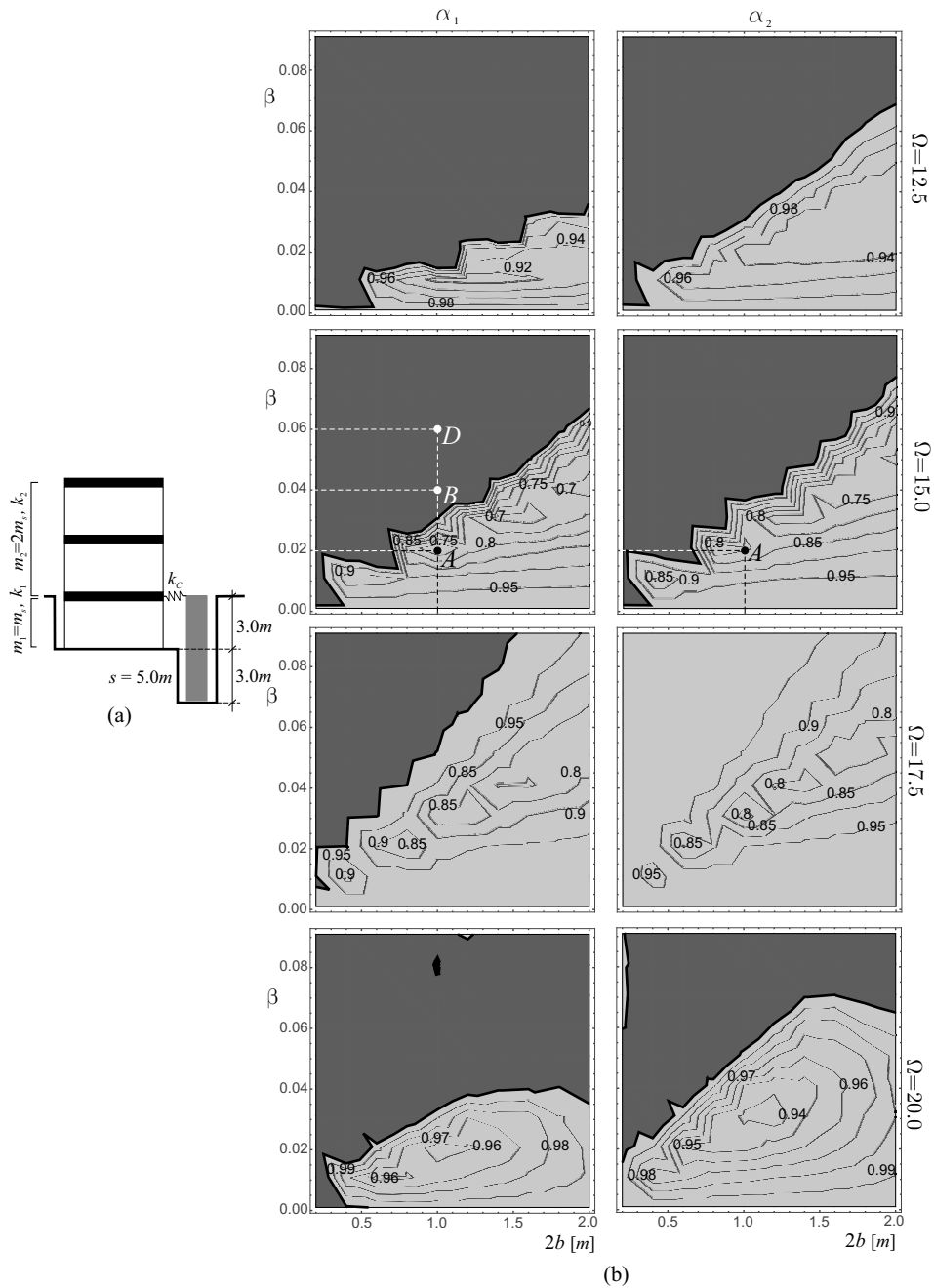
#### 3.4.2.1 Dispositivo puramente elastico

L'effetto dello smorzamento viscoso nel dispositivo di accoppiamento è inizialmente trascurato ( $c_C = 0$ ) e verrà analizzato in dettaglio successivamente. Il primo caso ad essere discusso riguarda l'accoppiamento di un blocco con una struttura intelaiata a tre piani (prima riga di Tab. 3.1 e Tab. 3.2). Le dimensioni geometriche fisse sono:  $d = 1$  m,  $h_1 = 3$  m. I risultati ottenuti dall'analisi sono generalmente indipendenti dallo specifico valore di  $d$ , ammesso che le rotazioni siano piccole e la rigidità di accoppiamento  $k_C$  non dipenda dalla lunghezza  $d$ . L'indipendenza del risultato da tale distanza può essere estesa anche al dispositivo di collegamento del blocco al terreno ED (Fig. 3.3) dove l'energia potenziale dipende dalla variazione di lunghezza del dispositivo e non dalla sua lunghezza iniziale. La Fig. 3.5a mostra le principali caratteristiche del sistema accoppiato mentre nella Fig. 3.5b sono riportate le mappe di guadagno relative ai coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Le mappe sono organizzate in modo

tale che ogni riga si riferisca ad uno specifico valore della frequenza circolare dell'eccitazione armonica mentre le due colonne si riferiscano ai due coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Le mappe sono distinte in due colori, grigio chiaro e grigio scuro. Nelle zone grigio chiaro il coefficiente di guadagno è minore dell'unità, pertanto in tali zone le coppie di parametri  $2b$  e  $\beta$  sono tali da consentire un miglioramento delle prestazioni, ovvero una riduzione di spostamenti e drift della struttura rispetto alla stessa struttura senza accoppiamento. Al contrario, nelle zone grigio scuro il coefficiente di guadagno è superiore all'unità, pertanto l'accoppiamento ha effetti negativi sulla risposta della struttura. In particolare i coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  si riferiscono, rispettivamente, al comportamento della sottostruttura e della sovrastruttura. Come è possibile osservare dalle mappe di Fig. 3.5b, sia l'estensione di queste regioni che l'efficienza all'interno di esse dipende dal contenuto in frequenza della forzante. In particolare, la massima efficienza del sistema accoppiato, in relazione agli spostamenti della sovrastruttura, si verifica per  $\Omega = 15$  rad/s dove si può osservare una riduzione del 25% del drift, corrispondente ad  $\alpha_2 = 0.75$ .

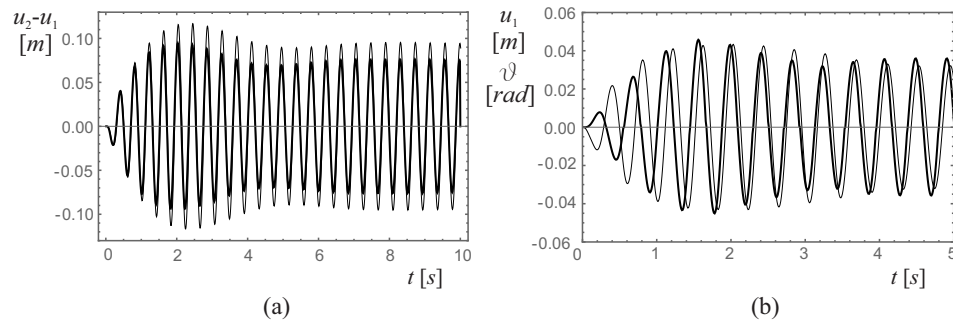
La Fig. 3.6a mostra le storie temporali di  $u_1$  e  $u_2 - u_1$  del sistema accoppiato (linea spessa) e del telaio non accoppiato (linea sottile). Poiché il punto A  $\equiv (2b = 1.0\text{m}; \beta = 0.02)$  si trova all'interno delle zone di guadagno, allora il sistema accoppiato ha prestazioni più elevate del sistema non accoppiato. Invece, la Fig. 3.6b mostra la rotazione  $\theta$  del blocco e lo spostamento  $u_1$  della sottostruttura. Si può osservare che, dopo le prime oscillazioni, il blocco e il telaio si sintonizzano per oscillare in contro-fase (le direzioni di positività sono riportate in Fig. 3.4). Con lo scopo di comprendere il funzionamento del sistema accoppiato, viene effettuata una analisi modale del sistema linearizzato. Questo è possibile poiché le rotazioni del blocco durante il moto restano sufficientemente piccole. Gli autovalori e autovettori del sistema sono ottenuti considerando le coppie di parametri indicati con A, B e D in 3.5b.

La Fig. 3.7 mostra i risultati dell'analisi modale. In alto, si può osservare la frequenza e la prima forma modale del telaio non accoppiato. Inferiormente, le tre colonne si riferiscono alle tre coordinate A, B e D evidenziate nella Fig. 3.5b. Il punto A è un punto di ottimo, poiché si trova in prossimità di punti di minimo relativo in entrambe le mappe. La frequenza  $\Omega = 15$  rad/s, per la quale abbiamo il valore minimo del coefficiente di guadagno, è molto vicino sia al valore della frequenza propria del primo modo del telaio non accoppiato sia al secondo modo della struttura accoppiata. Nel secondo modo non accoppiato la struttura e il telaio si



**Fig. 3.5:** (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno per differenti valori della frequenza circolare dell'eccitazione armonica ( $A \equiv (2b = 1.0\text{m}; \beta = 0.02)$ ;  $B \equiv (2b = 1.0\text{m}; \beta = 0.04)$ ;  $D \equiv (2b = 1.0\text{m}; \beta = 0.06)$ ).

muovono in contro-fase. Segue che per  $\Omega = 15$  la risposta del telaio non accoppiato è massima data la risonanza con il primo modo mentre la mitigazione dello spostamento del telaio è massima data la risonanza del secondo modo accoppiato in cui telaio e struttura si muovono in contro-fase. Pertanto il coefficiente di guadagno risultante è minimo. Quando a seguito del cambiamento del valore dei parametri di progetto ( $2b$  e  $\beta$ ) ci si sposta dal punto A verso il punto B, l'efficienza del sistema accoppia-



**Fig. 3.6:** Storie temporali del sistema accoppiato le cui caratteristiche sono indicate con A in Fig. 3.5; (a)  $u_2 - u_1$  del sistema accoppiato (linea spessa) e disaccoppiato (linea sottile) e (b)  $\theta$  (linea spessa) e  $u_1$  (linea fine) del sistema accoppiato (stessa scala per  $\theta$  e  $u_1$ ).

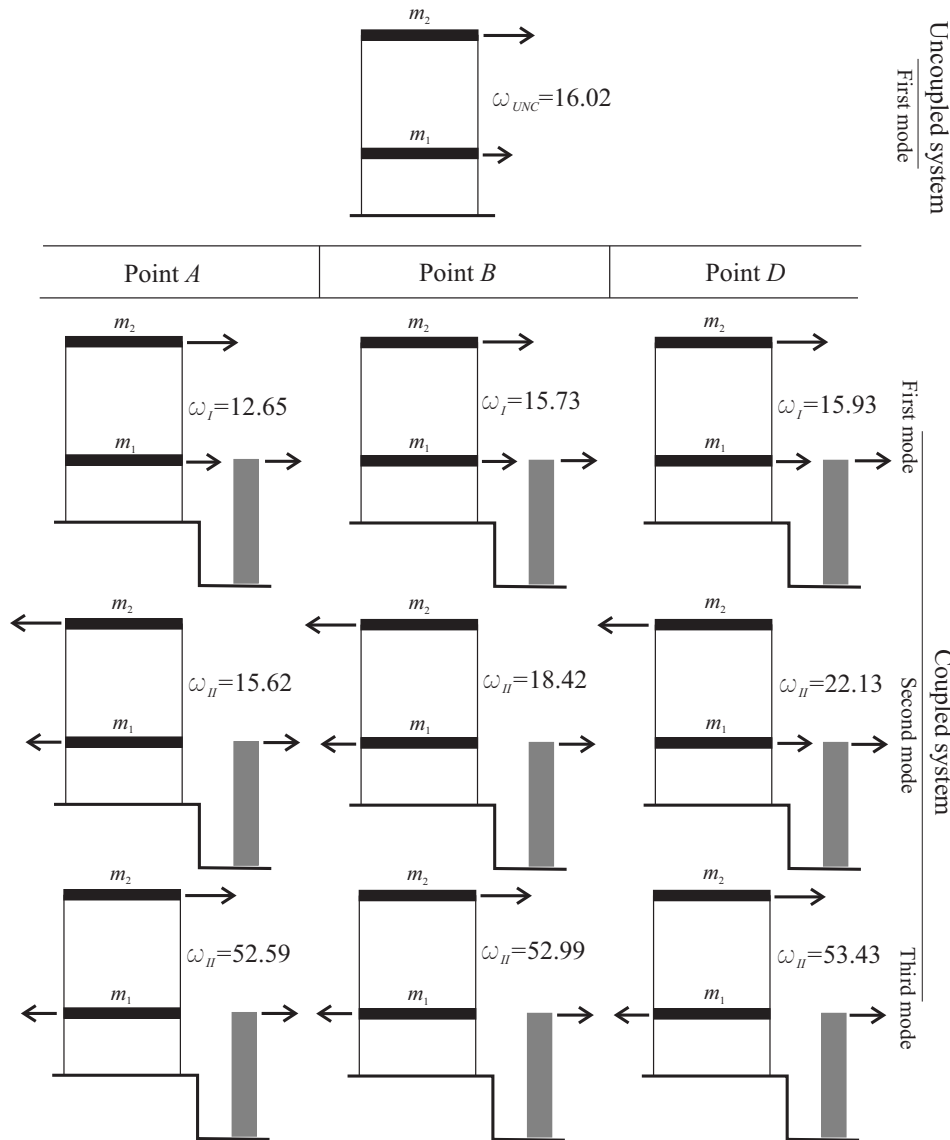
to decresce. Questo viene confermato anche dall'analisi modale, infatti nel punto B dove è il primo modo ad avere una frequenza vicina a quella dell' eccitazione esterna. Nel primo modo, blocco e telaio si muovono in fase così amplificando gli spostamenti. E' interessante osservare che nel secondo modo blocco e telaio si muovono ancora in contro-fase. Spostandosi nel punto D, il comportamento del sistema accoppiato deteriora ulteriormente poiché sia nel primo modo che nel secondo modo blocco e telaio si muovono in fase. La stessa analisi di Fig. 3.5b viene poi svolta per il telaio a cinque piani (seconda riga di Tab. 3.1 e Tab. 3.2). I parametri fissi sono  $d = 1$  m,  $h_1 = 6$  m (Fig. 3.8a).

La Fig. 3.8b mostra che, anche per un edificio di dimensioni maggiori, si possono ancora avere ampie zone grigio chiaro dove l'accoppiamento è in grado di ridurre sostanzialmente gli spostamenti del telaio, a patto di modificare opportunamente lo schema strutturale. In tal caso, il livello di connessione viene infatti posto al secondo piano. Il comportamento di questo sistema è analogo a quello mostrato in Fig. 3.7.

#### 3.4.2.2 Dispositivo di accoppiamento visco-elastico

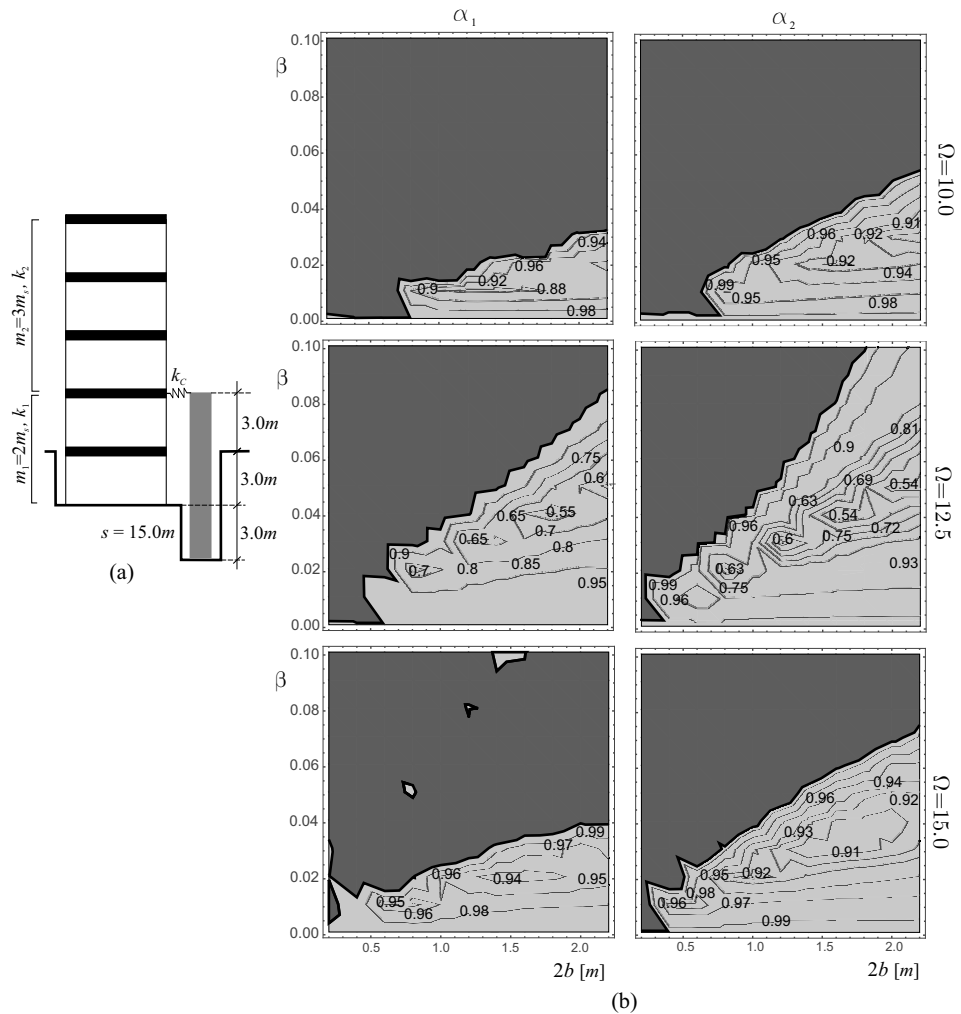
Gli effetti dello smorzamento del dispositivo di accoppiamento sono investigati svolgendo le stesse analisi viste nella sezione precedente variando il valore dello smorzamento del dispositivo di accoppiamento. Le mappe e le storie temporali che mostrano i risultati di tali simulazioni sono riportate in Fig. 3.9.

Il coefficiente  $C_c$  è parametrizzato rispetto al coefficiente di smorzamento del telaio  $c_1$ . La Fig. 3.9a mostra le storie temporali dello spostamento  $u_1$  e della rotazione  $\theta$  per differenti valori del coefficiente di smorzamento  $C_c$  del dispositivo di accoppiamento. L'incremento di  $C_c$  causa due



**Fig. 3.7:** Frequenze e forme modali del sistema accoppiato e disaccoppiato (le frequenze circolari sono in rad/s).

effetti: il primo è la riduzione dell'angolo di rocking  $\theta$  mentre il secondo, più importante, è la perdita della perfetta sintonizzazione in contro-fase che si era osservata in Fig. 3.6. Di conseguenza, l'efficacia del blocco come "Tuned Mass Damper" si riduce all'aumentare di  $C_c$ . Questo comportamento viene confermato dalle mappe di Fig. 3.9b, che estendono i risultati ottenuti visti nelle storie temporali ad un ampio intervallo dei parametri di progetto  $2b$  e  $\beta$ . Comparando queste mappe con quelle ottenute in Fig. 3.8b ( $\Omega = 15$  rad/s) è evidente come lo smorzamento riduce l'efficacia dell'accoppiamento e le zone di guadagno. Per comprendere meglio questo aspetto, si osservino le mappe in Fig. 3.10 le quali riportano il valore di  $\alpha_2$  al variare di  $C_c/c_1$  e  $\beta$ . In questo caso la base del blocco è assunta pari a  $2b = 1.0$  m.



**Fig. 3.8:** (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno per differenti valori della frequenza circolare dell'eccitazione armonica.

Le mappe mostrano come l'incremento di smorzamento ( $c_c/c_1$ ) produce un aumento del coefficiente di guadagno. In particolare, si osserva come i valori minimi del coefficiente di  $\alpha_2$  si trovino lungo l'asse  $c_c/c_1=0$ . Queste mappe sostanzialmente confermano che lo smorzamento riduce sempre la massima efficacia del blocco.

### 3.4.3 Il ruolo del dispositivo viscoelastico di collegamento tra blocco e terreno (ED)

#### 3.4.3.1 Dispositivo esterno puramente elastico

In questa sezione si valutano gli effetti sul sistema quando si introduce il dispositivo di collegamento con il terreno (ED). Ci sono molti modi con cui si possono raggiungere gli stessi effetti di ED. Ad esempio il blocco può essere connesso al terreno per mezzo di tiranti pre-sollecitati ([45]) oppure dispositivi visco-elastici che connettono gli angoli alla base del blocco con

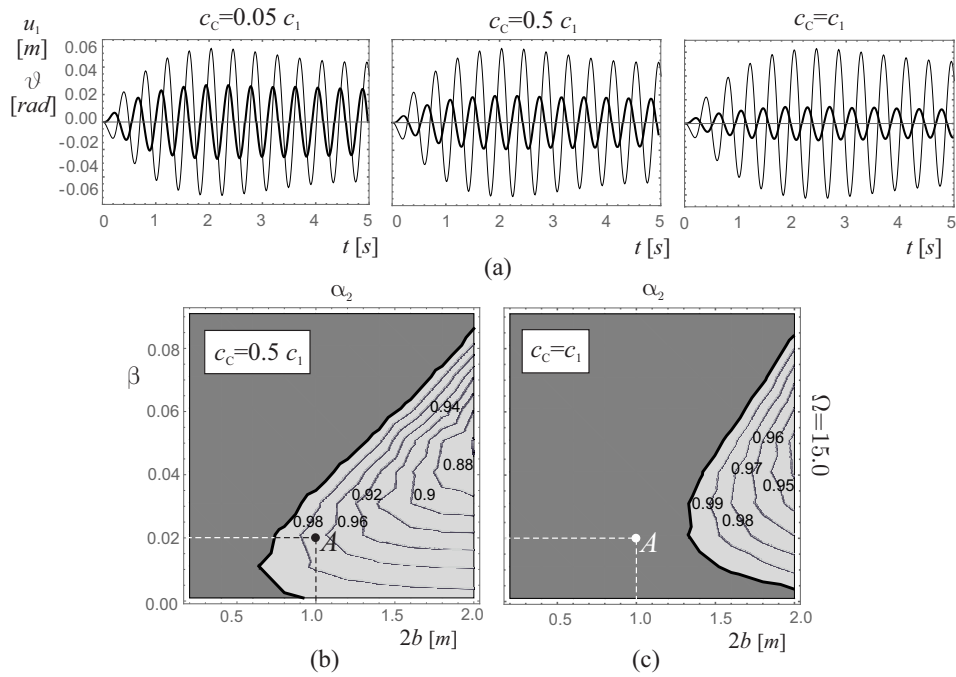


Fig. 3.9: (a) Storie temporali di  $u_1$  e  $\theta$  relative al punto A per differenti valori di  $C_c$ ; (b) mappa di guadagno per  $C_c = 0.5 c_1$ ; (c) mappa di guadagno per  $C_c = c_1$ .

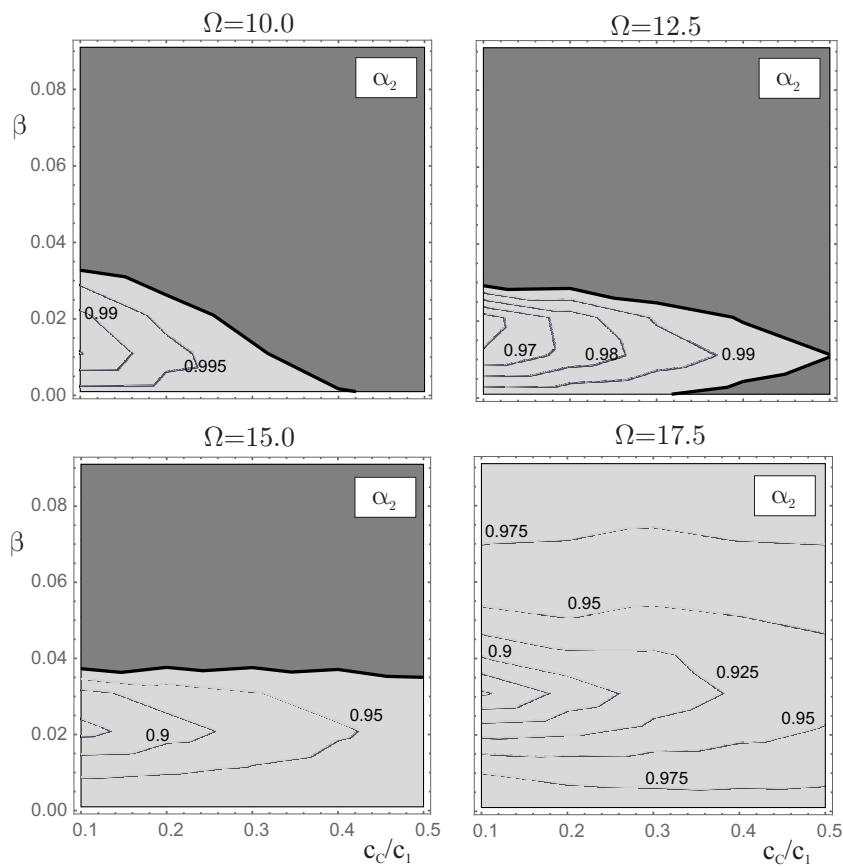
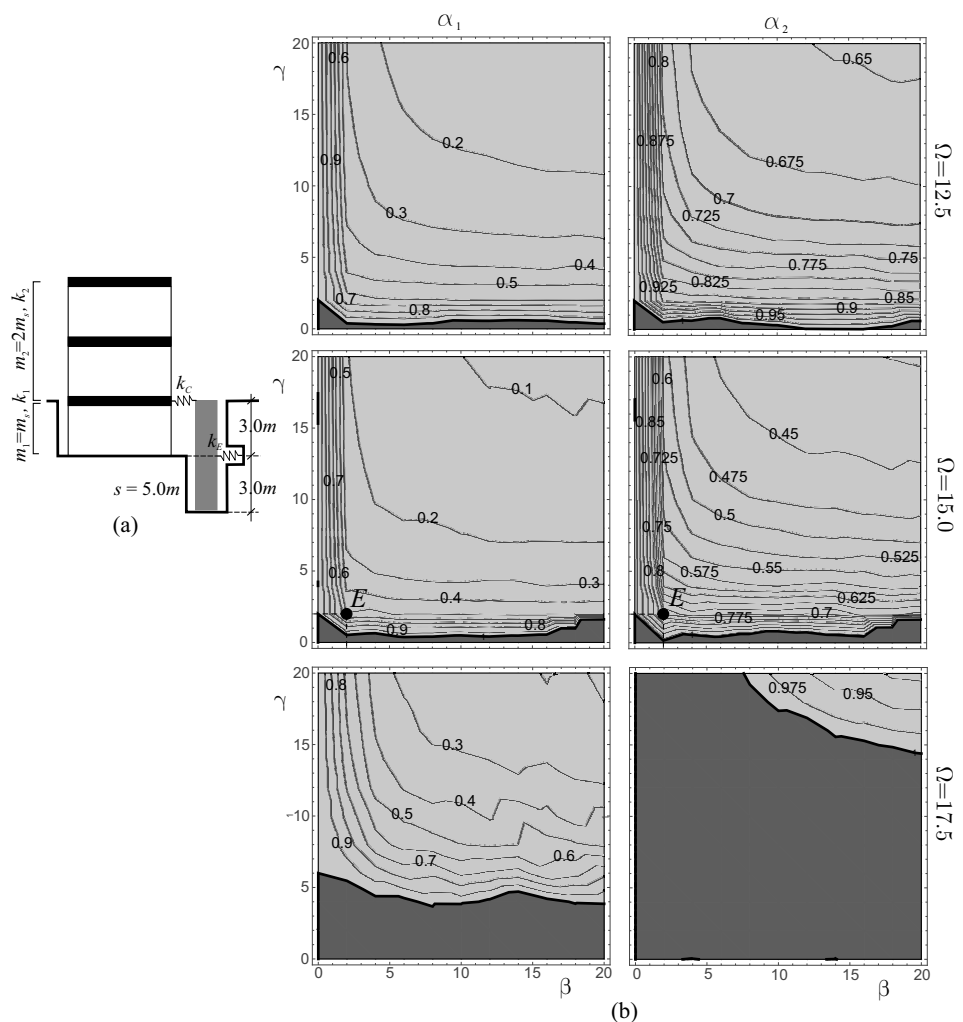


Fig. 3.10: Mappe di guadagno  $C_c/c_1$  e  $\beta$  per differenti valori della frequenza circolare dell'eccitazione armonica ( $2b = 1.0$ m).

il terreno ([82]). Per una migliore comprensione dei risultati, è adottata la seguente parametrizzazione:

$$k_C = \beta k_1, \quad k_E = \gamma k_1 \quad (3.31)$$

L'effetto del dispositivo esterno è valutato assumendo come parametri variabili i rapporti di rigidità  $\beta$  e  $\gamma$ , riferiti rispettivamente al dispositivo di accoppiamento (CD) e quello di collegamento con il terreno (ED). Nelle simulazioni svolte, i seguenti parametri sono assunti fissi e pari a:  $a = d = 2b = 1$  m,  $d_h = d_e$  e  $h_1 = 3$  m. Il valore della base scelta garantisce al blocco un valore di massa pari al 20% della massa totale del sistema. Analogamente alla sezione precedente, anche qui nella prima fase si trascura l'effetto dello smorzamento ( $C_E = 0$ ).



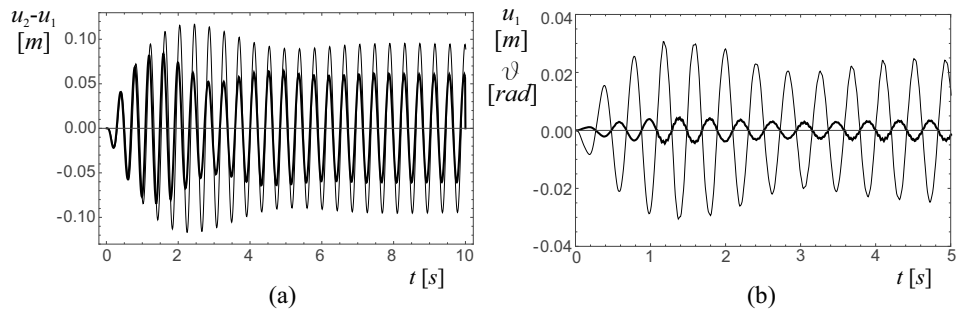
**Fig. 3.11:** (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno per differenti valori della frequenza circolare dell'eccitazione armonica ( $E \equiv (\beta = 2; \gamma = 2)$ ).

La Fig. 3.11 a mostra le caratteristiche del sistema accoppiato mentre la Fig. 3.11 b mostra le mappe di guadagno, relative ad  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per diversi va-

lori della frequenza circolare dell'eccitazione armonica. Analogamente alle mappe precedenti, anche in queste è possibile individuare due zone. Le zone grigio chiaro sono le zone in cui la combinazione di parametri  $\beta$  e  $\gamma$  è tale da ridurre gli spostamenti della struttura mentre le zone grigio scuro sono zone in cui la combinazione di parametri non è in grado di ridurre tali spostamenti o può addirittura peggiorarli. La migliore performance del sistema si verifica per  $\Omega = 15 \text{ rad/s}$ . Le storie temporali del drift della sovrastruttura, dello spostamento della sottostruttura e della rotazione del blocco, relative alle caratteristiche indicate dal punto E di Fig. 3.11b, sono riportate in Fig. 3.12. Nello specifico in Fig. 3.12a vi è una comparazione del drift della sovrastruttura tra il sistema accoppiato e il telaio non accoppiato. Poiché E si trova all'interno delle zone di guadagno della mappa  $\alpha_2$  allora il drift del sistema accoppiato sarà inferiore rispetto a quello del telaio non accoppiato. Nella Fig. 3.12b è possibile osservare che il blocco ed il telaio si muovono in fase. Pertanto in questo caso il maggior contributo dato dalla riduzione degli spostamenti è fornito da ED. L'efficacia del sistema non accoppiato è dovuta principalmente a due frequenze. Una di queste è la frequenza del sistema non accoppiato  $\omega_{unc}$  mentre l'altra è la frequenza della sovrastruttura, assunta isolata,  $\omega_2 = \sqrt{k_2/m_2} = 19.75 \text{ rad/s}$ . È interessante notare che lungo la diagonale delle mappe in Fig. 3.11b la frequenza principale varia da  $\omega_{unc}$  ( $\beta = 0, \gamma = 0$ ) a  $\omega_2$  ( $\beta \rightarrow +\infty, \gamma \rightarrow +\infty$ ). Possono verificarsi tre casi: (i) se  $\Omega < \omega_{unc}$ , la frequenza dell'eccitazione esterna è più vicina a quella del telaio non accoppiato che a quella del sistema accoppiato. In tal caso, poichè il sistema originale è quello più eccitato, l'accoppiamento con il blocco migliora la risposta del sistema ( $\Omega = 12.5$  e  $\Omega = 12.5$  di Fig. 3.11b). Il secondo caso (ii) si verifica quando  $\omega_{unc} < \Omega < \omega_2$ . In questo caso nella regione dei parametri  $\beta - \gamma$  dove le frequenze del sistema accoppiato sono vicine a quelle dell'eccitazione esterna, l'accoppiamento non è in grado di fornire un miglioramento delle prestazioni del sistema. Esistono comunque regioni nel piano dei parametri sufficientemente lontane dalla condizione suddetta per cui si riescono a individuare zone di guadagno. Tuttavia in tal caso il miglioramento delle prestazioni che si può ottenere è alquanto modesto ( $\Omega = 17.5$  di Fig. 3.11b). La terza condizione (iii) si verifica quando  $\Omega > \omega_2$ . In quest'ultimo caso l'accoppiamento non è mai efficace.

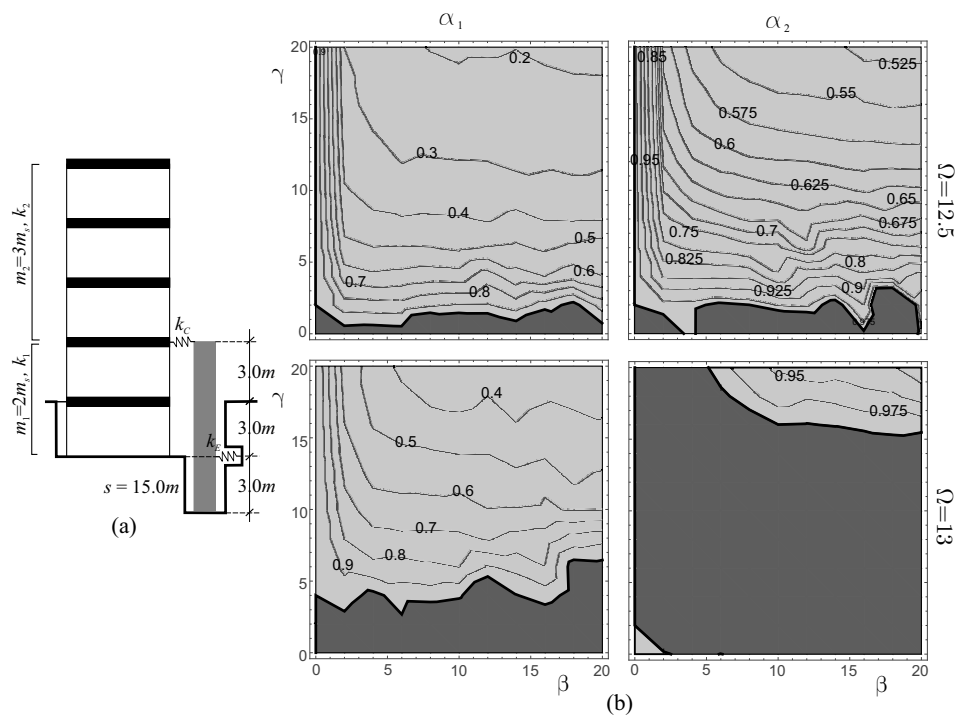
Come ulteriore esempio, vengono riportate le analisi eseguite considerando per il sistema 2-GDL un set di parametri equivalenti (Tab. 3.2) ad un telaio di cinque piani (Tab. 3.1). I parametri fissi sono  $a = d = 2b = 1 \text{ m}$ ,  $d_h = d_e$  e  $h_1 = 6 \text{ m}$ .

### ACCOPIAMENTO TRA TELAIO E ROCKING WALL



**Fig. 3.12:** Storie temporali del sistema accoppiato avente le caratteristiche indicate nel punto E di Fig. 3.11: (a) Drift  $u_2 - u_1$  del sistema accoppiato (linea spessa) e del telaio non accoppiato (linea sottile) e (b)  $\theta$  (linea spessa) ed  $u_1$  (linea sottile) del sistema accoppiato.

La Fig. 3.13a mostra lo schema geometrico dell'accoppiamento mentre in Fig. 3.13b sono riportate le mappe di guadagno relative ad  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per due diversi valori della frequenza dell'eccitazione armonica. Si confermano le stesse deduzioni relative alle mappe di Fig. 3.11b dove l'estensione delle regioni di guadagno è legata alla frequenza dell'eccitazione esterna. Il funzionamento del sistema è lo stesso spiegato in precedenza per le mappe di Fig. 3.11b.



**Fig. 3.13:** (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno per differenti valori della frequenza circolare dell'eccitazione armonica ( $\omega_2 = 14.18 \text{ rad/s}$ ).

3.4.3.2 Dispositivo esterno visco-elastico

In questa sezione si analizzano gli effetti di  $c_E$ . Poichè sono presenti sia CD che ED, il blocco e il telaio si muovono in fase, pertanto il comportamento è influenzato maggiormente da ED. Pertanto le analisi si concentrano su ED e si assume  $c_C = 0$ . I parametri equivalenti per il sistema archetipo sono rappresentativi del telaio a tre piani di Tab. 3.1 e Tab. 3.2. La Fig. 3.14 mostra le mappe di guadagno  $\alpha_2$  per una frequenza circolare  $\Omega = 17$  rad/s. Le mappe sono ottenute al variare di  $c_E$ , parametrizzato rispetto a  $c_1$ . Osservando la Fig. 3.14a si nota che la presenza dello smorzamento rende le regioni di guadagno più lisce e regolari. Inoltre, la regione di svantaggio (grigio scuro) diventa più piccola rispetto al caso non smorzato. La lunghezza dei segmenti  $\Delta\gamma_0$  e  $\Delta\gamma_1$ , in corrispondenza di  $\beta = 10$ , può essere presa come misura dell'estensione della zona grigio scura. Lo smorzamento riduce debolmente la lunghezza di tale segmento. Per confermare l'effetto migliorativo legato alla presenza dello smorzamento  $c_E$ , viene svolta un'ulteriore analisi di cui risultati sono riportati in Fig. 3.14b. Essa mostra il coefficiente  $\alpha_2$  nel piano dei parametri  $c_E/c_1 - \gamma$  per  $\beta = 10$  e  $c_C = 0$ . Lungo le linee verticali, passanti per  $c_E = 0$  e  $c_E = 5c_1$  è possibile ritrovare i segmenti  $\Delta\gamma_0$  e  $\Delta\gamma_1$  della Fig. 3.14a. Il decremento dell'estensione verticale della zona grigio chiara ( $\Delta\gamma_0 > \Delta\gamma_1$ ) che si verifica con l'aumentare di  $c_E$  ha effetti positivi sul comportamento del sistema accoppiato. Infatti, la debole pendenza delle curve di livello sulla mappa mostra anche che, muovendosi lungo l'asse orizzontale ( $\gamma = \text{cost}$ ), si hanno delle piccole riduzioni sul coefficiente  $\alpha_2$ .

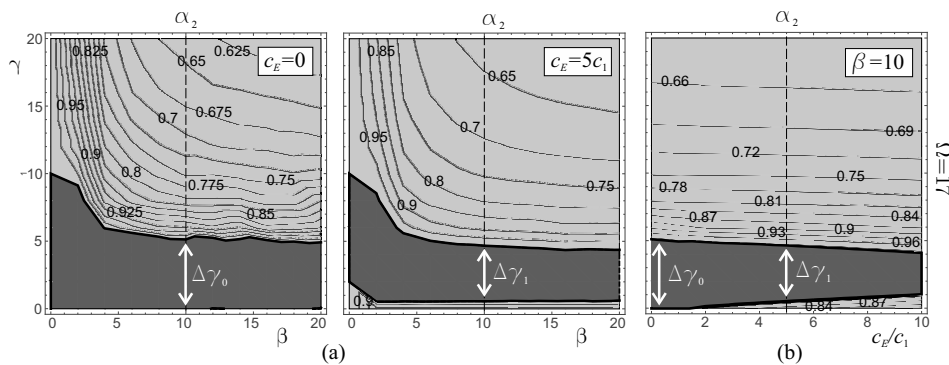


Fig. 3.14: Effetti dello smorzamento di ED: (a) mappe di guadagno nel piano dei parametri  $\beta - \gamma$  per differenti valori di  $c_E$  e (b) mappa di guadagno nel piano  $c_E/c_1 - \gamma$  per  $\beta = 10$  e  $c_C = 0$ .

### 3.4.4 Considerazioni finali sull'analisi armonica

Nel caso in cui è presente solamente il dispositivo di accoppiamento CD, si è trovato che:

- l'efficienza dell'accoppiamento tra blocco e telaio è più elevata quando il blocco ha una base sufficientemente alta. Per bassi valori della base  $2b$ , l'accoppiamento non è quasi mai in grado di ridurre gli spostamenti del telaio (Fig. 3.5 e Fig. 3.8);
- Un valore più elevato della base  $2b$  richiede una rigidezza maggiore del dispositivo di accoppiamento; comunque il rapporto di rigidezza  $\beta$  che assicura una buona risposta del sistema accoppiato resta sempre comunque sufficientemente piccolo ( $\beta < 0.09$ );
- Dalle precedenti analisi si deduce che l'accoppiamento funziona bene quando la frequenza dell'eccitazione armonica è prossima a quella del modo di vibrazione in cui il blocco e il piano del telaio ad esso connesso si muovono in contro-fase, così assicurando che il blocco abbia un funzionamento simile al "Tuned Mass Damper". Poiché la frequenza di tale modo è in generale più alta del primo modo del telaio non accoppiato, la presenza del blocco assicura effetti migliorativi per frequenze dell'eccitazione armonica più elevate delle frequenze del telaio non accoppiato.

Qualora sia presente anche il dispositivo esterno ED di collegamento tra blocco e telaio si ha che:

- Per tutte le lunghezze della base  $2b$  considerate, sono necessari valori molto alti dei rapporti di rigidezza  $\beta$  and  $\gamma$  per assicurare buone prestazioni al sistema accoppiato (Fig. 3.11 e Fig. 3.13); in generale sia le rigidezze  $k_C$  e  $k_E$  devono essere più elevate della rigidezza  $k_1$ ;
- Dalle analisi precedenti si deduce che l'accoppiamento funziona bene quando la frequenza dell'eccitazione armonica è prossima o più piccola della prima frequenza del telaio non accoppiato; contrariamente al caso precedente, qui l'accoppiamento assicura effetti migliorativi per valori dell'eccitazione armonica più piccoli di quelli della prima frequenza del telaio disaccoppiato.

### 3.5 Analisi sismica

#### 3.5.1 Il sistema meccanico e le equazioni del moto

L'analisi sismica è svolta su un sistema a tre gradi libertà. Il telaio è modellato attraverso un sistema equivalente a due gradi di libertà (Appendice A.1) collegato, per mezzo di un dispositivo viscoelastico ad un blocco rigido.

Le analisi svolte in 3.4 hanno mostrato che il funzionamento ottimale avviene quando è presente un comportamento tipo "Tuned Mass Damper" ovvero quando è presente solamente l'organo viscoelastico di accoppiamento. Pertanto, nella seguente analisi non si considera la presenza di ED ( $k_E = c_E = 0$ ). I dispositivi inerter non vengono considerati ( $m_{R1} = m_{R2} = 0$ ) ma viene considerata una massa concentrata sulla testa del blocco ( $M_e \neq 0$ ) con lo scopo di aumentare l'inerzia del blocco. Come già individuato nell'analisi precedente, qualora è presente solo il dispositivo di accoppiamento (CD) il blocco è in grado di mitigare le vibrazioni del telaio agendo come una sorta di "Tuned Mass Damper". Come già noto dalla teoria classica le performance del TMD sono strettamente legate al rapporto di massa, ovvero alla massa del TMD rapportata alla massa della struttura da proteggere. Per aumentare la massa del blocco senza ingrandirne le dimensioni, si pensi di realizzare la testa del blocco con un materiale più pesante rispetto a quello utilizzato per il blocco. Le equazioni del moto sono pertanto ricavate dall'Eq. (3.14) e Eq. (3.16) dove  $k_E = c_E = 0$ ,  $m_{R1} = m_{R2} = 0$  e  $M_e \neq 0$ .

$$\begin{aligned}
 & -k_C (d - (d_h + h_1) \sin \theta - u_1) \times Q_1 + \\
 & c_C ((d_h + h_1) \dot{\theta} \cos \theta + \dot{u}_1) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - \\
 & c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & k_C (d_h + h_1) ((u_1 - d) \cos \theta + (d_h + h_1) \sin \theta) \times Q_1 - \\
 & \ddot{x}_g (\cos \theta (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) + b (M + M_e) \sin \theta) + \\
 & b g (M + M_e) \cos \theta - g (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) + \\
 & c_C (d_h + h_1) ((d_h + h_1) \dot{\theta} + \dot{u}_1 \cos \theta) + J_A \ddot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

dove  $J_A = J_C + M(b^2 + h_b^2) + M_e(b^2 + (2h_b + h_e)^2)$  è l'inerzia polare totale del blocco e della massa aggiunta rispetto al vertice A. La quantità  $Q_1$  è pari

a

$$Q_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 2(d - u_1)(d_h + h_1) \sin \theta - 2du_1 + 2d_h^2 - 2(d_h + h_1)^2 \cos \theta + 4d_h h_1 + 2h_1^2 + u_1^2}}{\sqrt{d^2 - 2(d - u_1)(d_h + h_1) \sin \theta - 2du_1 + 2d_h^2 - 2(d_h + h_1)^2 \cos \theta + 4d_h h_1 + 2h_1^2 + u_1^2}} \quad (3.33)$$

L'equazione del moto quando il blocco oscilla intorno al vertice B è data da:

$$\begin{aligned} & k_C (2b \cos \theta - 2b - d + (d_h + h_1) \sin \theta + u_1) \times Q_3 + \\ & c_C (\dot{\theta} ((d_h + h_1) \cos \theta - 2b \sin \theta) + \dot{u}_1) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - \\ & c_2 \ddot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\ & \text{-----} \\ & c_2 (\ddot{u}_2 - \ddot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\ & \text{-----} \\ & k_C \left( \sin \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + h_1(2d_h + h_1) \right) \right) \times Q_3 - \\ & k_C ((d - u_1)(d_h + h_1) \cos \theta) \times Q_2 + \\ & c_C \left( (4b^2 + (d_h + h_1)^2) \dot{\theta} + \dot{u}_1(t) ((d_h + h_1) \cos \theta - 2b \sin \theta) \right) + J_B \ddot{\theta} - \\ & bg (M + M_e) \cos \theta + \ddot{x}_g (b(M + M_e) \sin \theta - (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) \cos \theta) - \\ & g (h_b M + 2h_b M_e + h_e M_e) \sin \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

dove:

$$Q_3 = \frac{-d + \sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + h_1(2d_h + h_1) \right) + 4bd - 4bu_1 + d^2 - 2(d - u_1)(d_h + h_1) \sin \theta - 2du_1 + 2d_h^2 + 4d_h h_1 + 2h_1^2 + u_1^2}}{\sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta \left( 2b(2b + d) - 2bu_1 + d_h^2 + 2d_h h_1 + h_1^2 \right) + 4bd - 4bu_1 + d^2 - 2(d - u_1)(d_h + h_1) \sin \theta - 2du_1 + 2d_h^2 + 4d_h h_1 + 2h_1^2 + u_1^2}} \quad (3.35)$$

Poichè il blocco è simmetrico, segue che  $J_A = J_B$ .

### 3.5.1.1 Condizioni di uplift e di impatto del blocco

La presenza della massa aggiunta modifica le condizioni di uplift. Infatti dalla (3.18) risulta che la condizione di uplift rispetto al vertice A è:

$$a_{UP} = \frac{(M + M_e)gb}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} + \frac{[k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} \quad (3.36)$$

In assenza di accoppiamento e massa in testa, si riottiene la formulazione classica dell'uplift per il blocco rigido. La condizione di uplift rispetto

al vertice B è data dalla (3.19) ovvero:

$$a_{UP} = -\frac{(M + M_e)gb}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} + \frac{[k_C u_1(t) + c_C \dot{u}_1(t)] (d_h + h_1)}{Mh_b + M_e(2h_b + h_e)} \quad (3.37)$$

La condizione di impatto è analoga a quella descritta in 3.2.0.1, tenendo conto che il momento statico è  $S_y = (M + M_e) b$ .

### 3.5.1.2 Eccitazione sismica

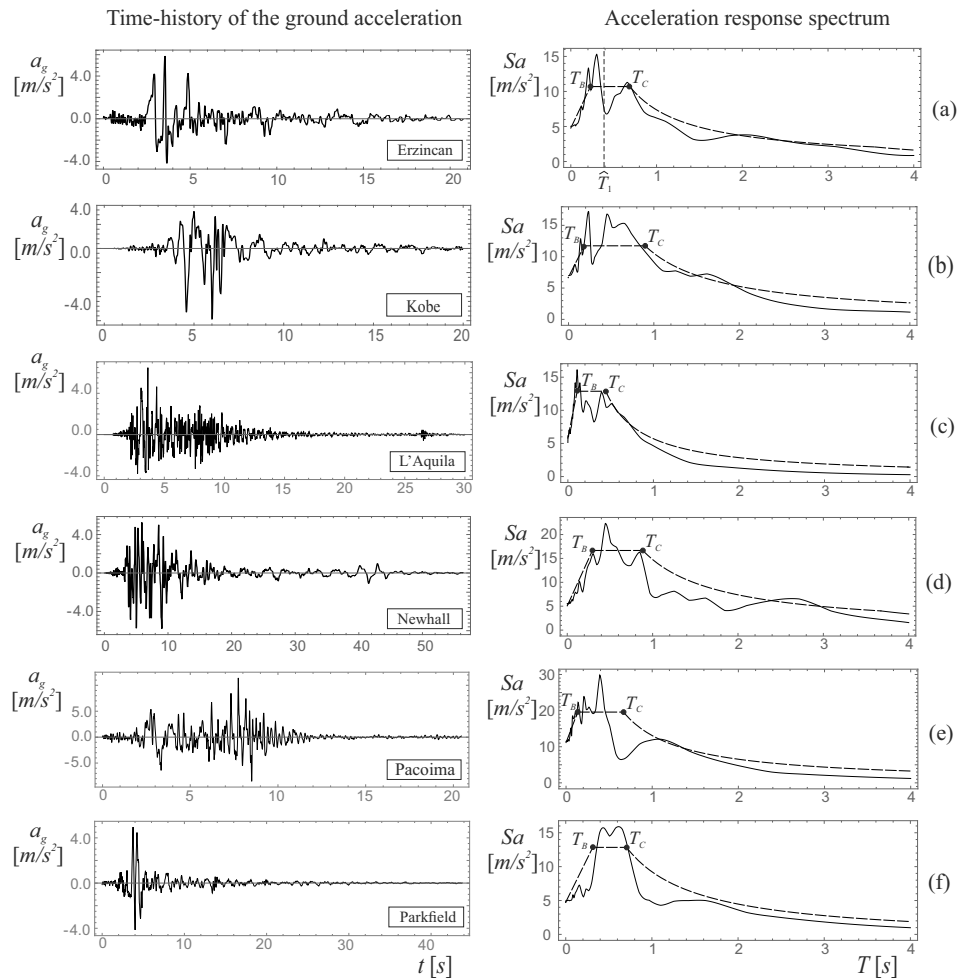
Nelle analisi che seguono, sei differenti registrazioni sismiche sono utilizzate come eccitazioni esterne. La Fig. 3.15 mostra le loro storie temporali (sulla sinistra) e i loro spettri elastici in accelerazione (sulla destra). Nei grafici sulla destra la linea continua si riferisce allo spettro di accelerazione, mentre la linea tratteggiata rappresenta lo spettro di risposta regolarizzato. La procedura di regolarizzazione è descritta in [83] and [84] e viene anche adottata dall' *Italian Technical Building Codes* (NTC 2018). I due periodi  $T_A$  and  $T_B$ , forniti dalla procedura di regolarizzazione, misurano l'ampiezza dell'intervallo piatto dove lo spettro mostra il contenuto maggiore di potenza spettrale. Questi dati saranno utilizzati in seguito.

- (a) Erzincan, NS ground motion recorded during the 1992 Turkey earthquake;
- (b) Kobe, Takarazuka-000 station, ground motion recorded during the 1995 Japan earthquake;
- (c) L'Aquila, IT.AQV.HNE.D.20090406.013240.X.ACC station, ground motion recorded during the 2009 Italian earthquake;
- (d) Newhall, Newhall-360 station, ground motion recorded during the 1994 Northridge, California earthquake;
- (e) Pacoima, Dam-164 ground motion recorded during the 1971 San Fernando, California earthquake;
- (f) Parkfield, CO2-065 ground motion recorded during the California earthquake 1966.

A seguire ogni registrazione sismica sarà chiamata con il nome sottolineato della lista.

### 3.5.2 Il ruolo del dispositivo di accoppiamento (CD)

Per investigare il comportamento del sistema accoppiato viene svolta un'analisi parametrica dove le equazioni sono integrate numericamente come



**Fig. 3.15:** Storie temporali e spettri di accelerazione dei terremoti analizzati: (a) Erzincan; (b) Kobe; (c) L'Aquila; (d) Newhall; (e) Pacoima; (f) Parkfield.

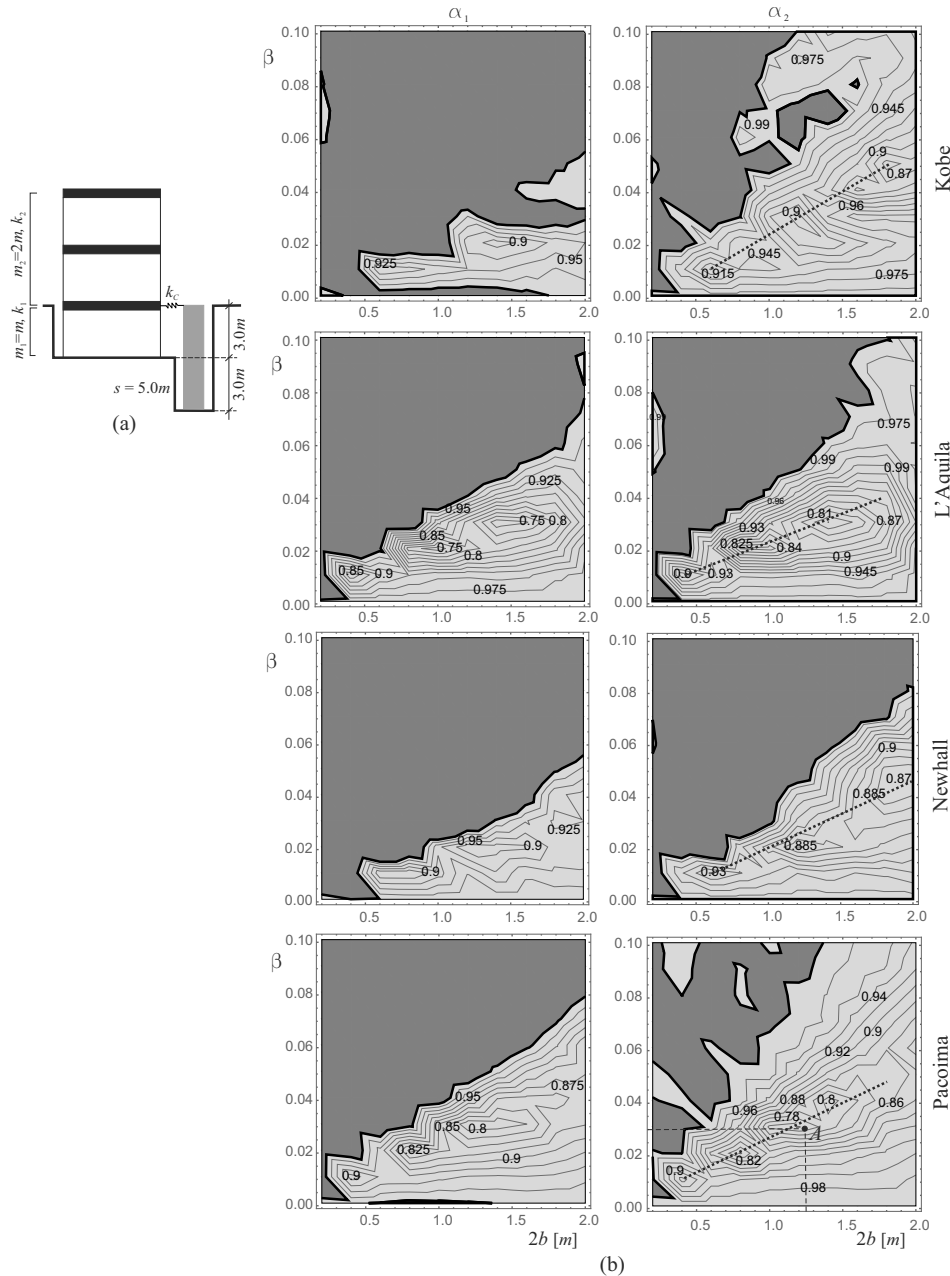
descritto in 3.2.0.2. Nelle analisi svolte, il blocco non raggiunge mai l'angolo critico  $\alpha_C = \arctan(b/h_b)$  e pertanto non vi è ribaltamento. Le caratteristiche degli edifici e dei rispettivi modelli archetipi considerati nelle analisi sono riportate, rispettivamente, in Tab. 3.1 e Tab. 3.2. E' adottata la seguente parametrizzazione per facilitare la comprensione dei risultati:

$$k_C = \beta k_1, \quad c_C = \gamma c_1 \quad (3.38)$$

I risultati delle simulazioni numeriche sono organizzati in mappe di guadagno. Il significato delle mappe è lo stesso di quello descritto in 3.4. I parametri che sono fatti variare nelle analisi sono la base del blocco  $2b$  e il rapporto di rigidezza  $\beta$  di CD (3.38). All'interno delle mappe si individuano le regioni grigio chiaro, qualora i coefficienti sono inferiori all'unità e le regioni scure, dove i coefficienti sono maggiori dell'unità. L'accoppiamento è considerato migliorativo per il comportamento della struttura se i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità.

### 3.5.2.1 Dispositivo di accoppiamento puramente elastico

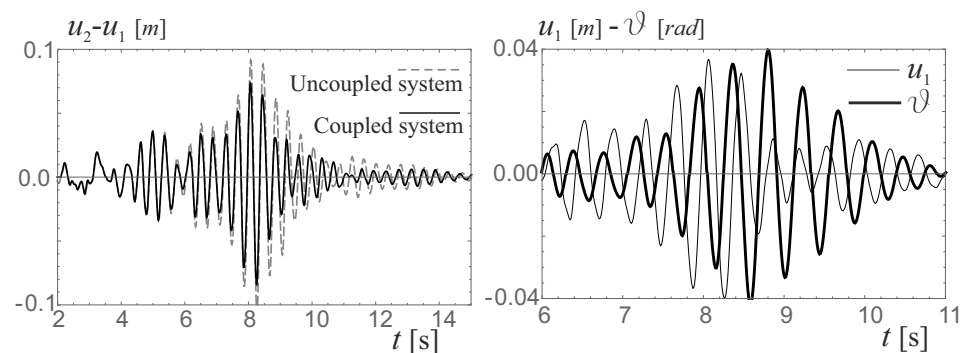
Nella prima campagna di simulazioni, si considera un dispositivo di accoppiamento puramente elastico ( $c_C = 0$ ). Nella Fig. 3.16, le mappe di guadagno sono organizzate a forma di matrice, dove le colonne corrispondono ai due coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  mentre ogni riga si riferisce ad una diversa registrazione sismica.



**Fig. 3.16:** Analisi parametrica: (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno sismiche.

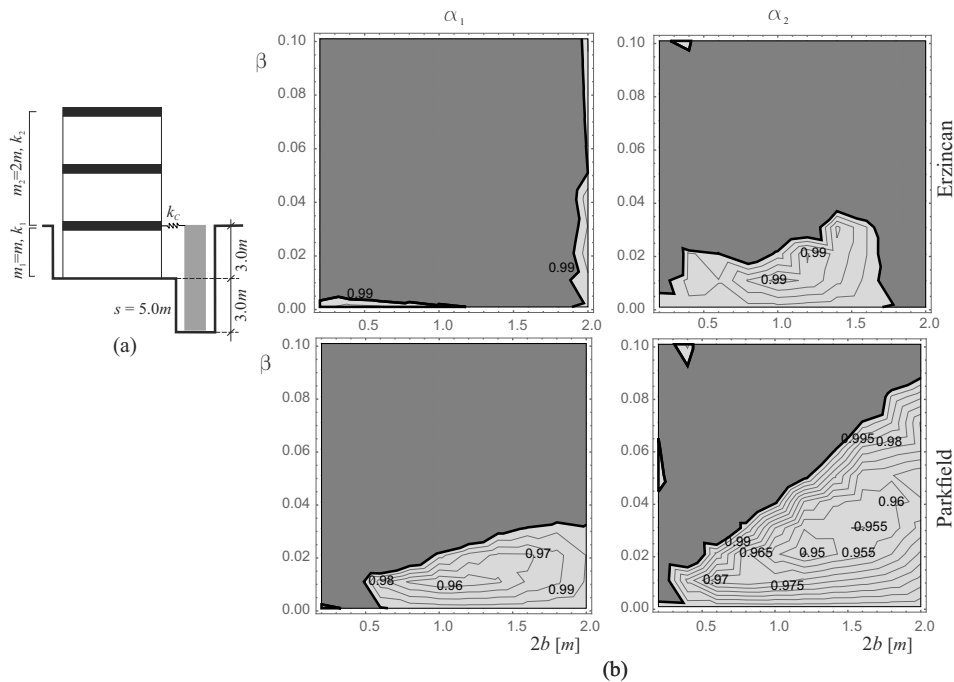
La Fig. 3.16b mostra che, per ognuno dei quattro terremoti analizzati esistono combinazioni di parametri tali da migliorare il comportamento dina-

mico del sistema ( $\alpha_i < 1, i = 1, 2$ ). Tuttavia l'efficienza dell'accoppiamento dipende fortemente dall'azione esterna. Ad esempio, nelle registrazioni sismiche di Kobe e Newhall l'accoppiamento manifesta un'efficienza massima inferiore rispetto a l'Aquila e Pacoima. Inoltre, anche l'estensione delle regioni di guadagno varia con l'azione esterna. Un aspetto molto interessante da considerare è la posizione dei punti di minimo relativo delle mappe  $\alpha_2$ . Tali punti sono infatti localizzati lungo una retta (rappresentata da una linea tratteggiata in Fig. 3.16b) che si mantiene pressoché costante per ogni registrazione sismica utilizzata. Una riduzione del drift della sovrastruttura del 10% è assicurata su ogni mappa e raggiunge valori oltre il 20% nel caso della registrazione di Pacoima. Per comprendere come l'accoppiamento tra telaio e blocco è capace di mitigare le vibrazioni del telaio stesso, le storie temporali del sistema, le cui caratteristiche sono identificate dal punto A ( $(2b = 1.25m, \beta = 0.03)$ ) sulla mappa  $\alpha_2$  di Pacoima in Fig. 3.16b, sono rappresentate in Fig. 3.17. In particolare, il grafico sulla sinistra mostra che drift del sistema accoppiato (linea nera) ha valori inferiori di quella del sistema disaccoppiato (linea tratteggiata). Nel grafico di sinistra si sovrappongono le curve rappresentanti  $u_1$  (linea sottile) e  $\theta$  (linea spessa). Si osserva che, considerate le direzioni di positività (Fig. 3.4b), la sottostruttura e il blocco tendono a sincronizzarsi in contro-fase nella zona di massima eccitazione. In tal modo il blocco mitiga gli spostamenti della struttura funzionando come una sorta di Tuned Mass Damper.



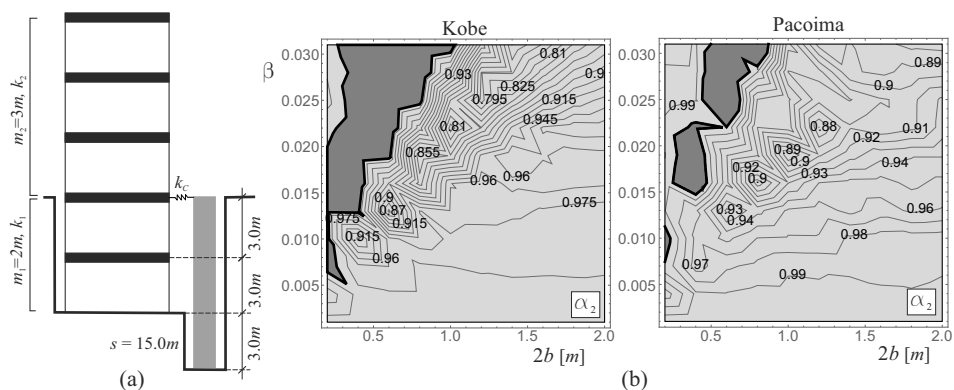
**Fig. 3.17:** Storie temporali del punto A sulla mappa di Pacoima in Fig. 3.16b.

La Fig. 3.18a rappresenta lo schema di accoppiamento di un telaio le cui caratteristiche sono riportate nella prima riga di Tab. 3.1 e Tab. 3.2. La Fig. 3.18b mostra le mappe di guadagno dell'accoppiamento di tale telaio con un blocco rigido considerando le registrazioni dei terremoti di Erzincan e Parkfield come azione esterna. Differentemente dalla Fig. 3.16b, in queste mappe l'efficienza dell'accoppiamento è molto bassa e non è possibile individuare una linea di minimo comune.



**Fig. 3.18:** Analisi parametrica: (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno sismiche.

I risultati delle simulazioni effettuate su un telaio a cinque piani sono riportate in Fig. 3.19. In particolare la Fig. 3.19a mostra lo schema di accoppiamento tra il blocco e il telaio le cui caratteristiche possono essere trovate nella seconda riga delle Tab. 3.1 e Tab. 3.2. Nella Fig. 3.19b sono riportate le mappe di guadagno relative alle registrazioni dei terremoti di Kobe e Pacoima. Su entrambe le mappe la riduzione del drift della sovrastruttura supera il 10%, tuttavia per poter mitigare gli spostamenti del telaio a cinque piani sono necessarie misure del blocco maggiori rispetto al caso relativo al telaio a tre piani in quanto è necessario fornire una maggiore massa al blocco. Similmente alla Fig. 3.16, anche in queste mappe si riesce ad individuare una retta che identifica i punti di minimo relativo.



**Fig. 3.19:** Analisi parametrica: (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno sismiche.

### 3.5.3 Il ruolo della massa aggiunta e del livello di connessione

Nelle Fig. 3.16, 3.18 e 3.19 il rapporto tra la massa del blocco e quella del telaio varia tra il 4% e il 40% della massa totale del telaio. In questa sezione si valuta la capacità di una massa aggiunta  $M_e = 0.5M$  sulla testa del telaio a ridurre gli spostamenti della sovrastruttura. La Fig. 3.20a mostra lo schema di accoppiamento mentre la Fig. 3.20b mostra le mappe relative ad  $\alpha_2$  usando le registrazioni di Kobe, Newhall, Erzincan e Parkfield come eccitazione esterna. Comparando le mappe di Fig. 3.20b con le mappe del sistema senza massa aggiunta di Fig. 3.16 si osserva un generale ampliamento delle zone di guadagno e una sensibile riduzione dei valori di minimo del coefficiente  $\alpha_2$ . Un altro effetto molto interessante della massa aggiunta è l'incremento della pendenza della retta (linea tratteggiata in Fig. 3.20b) che individua i punti di minimo relativo. L'incremento della pendenza della retta di minimo rende possibile raggiungere buone prestazioni dell'accoppiamento utilizzando blocchi di dimensioni inferiori (valore inferiore di  $2b$ ). Le mappe mostrate nella seconda riga di Fig. 3.20b si riferiscono alle registrazioni dei terremoti di Erzincan e Parkfield. Il confronto tra queste mappe e quelle di Fig. 3.18 mostra che la massa aggiunta amplia le regioni di guadagno. Tuttavia, solo nel caso della registrazione di Parkfield tale ampliamento è accompagnato da una sensibile riduzione del coefficiente di guadagno  $\alpha_2$  mentre nel caso della registrazione di Erzincan i valori di  $\alpha_2$  restano molto vicini all'unità.

### 3.5.4 Il ruolo dello smorzamento di accoppiamento

In questa sezione si analizza il ruolo dello smorzamento nel dispositivo di accoppiamento (CD) viscoelastico. La Fig. 3.21a mostra lo schema di accoppiamento tra il blocco e il telaio a tre piani le cui caratteristiche sono riportate in Tab. 3.1 e Tab. 3.2. Il valore dello smorzamento  $c_C$  è parametrizzato rispetto a  $c_1$  (Fig. 3.1). La Fig. 3.21b e Fig. 3.21c mostrano le mappe e le superfici di guadagno di  $\alpha_2$  per le registrazioni sismiche di l'Aquila e Pa-coima. Le mappe di guadagno sono la proiezione sul piano dei parametri delle superfici di guadagno. Si osserva che l'incremento di  $c_C$  produce una regolarizzazione delle superfici e della mappe. Un effetto non trascurabile associato a questa regolarizzazione è un incremento generale del coefficiente di guadagno e pertanto una diminuzione dell'efficienza dell'accoppiamento. Inoltre, la presenza dello smorzamento  $c_C$  riduce il numero di punti di minimo relativo fino a uno, rendendo più facile l'individuazio-

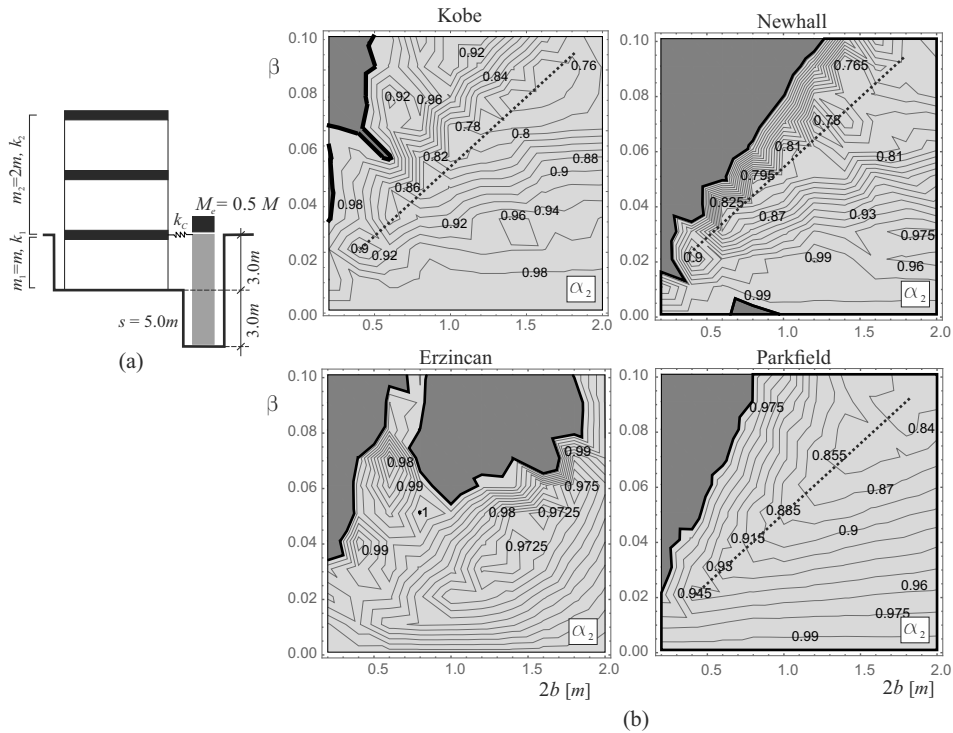


Fig. 3.20: Analisi parametrica: (a) Schema di accoppiamento e (b) mappe di guadagno sismiche.

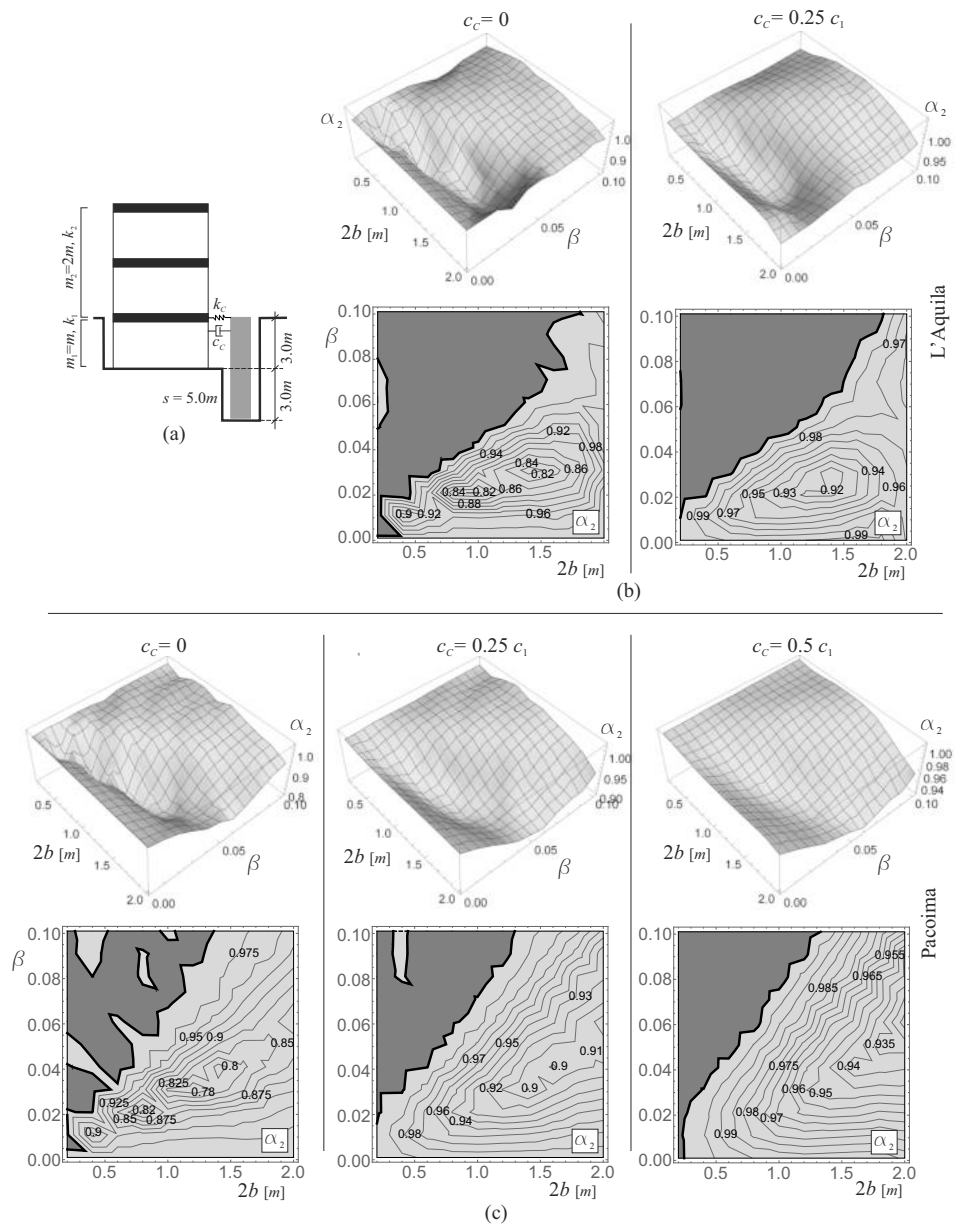
ne dei parametri di ottimo. Ad esempio si osservi la mappa di Fig. 3.21b. Nella mappa a sinistra ( $c_C = 0$ ) vi sono molti punti di minimo relativo; nella mappa a destra, ottenuta per ( $c_C = 0.25c_1$ ) il numero dei punti di minimo si riduce ad uno.

### 3.5.5 Interpretazione dei risultati

#### 3.5.5.1 Equazioni linearizzate

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 3.4, per poter interpretare correttamente i risultati ottenuti dalle precedenti analisi parametriche si opera un'analisi modale su un sistema linearizzato, basato sull'ipotesi di piccole rotazioni  $\theta$ . Tale ipotesi risulta verificata nelle simulazioni effettuate precedentemente in quanto l'angolo di rotazione  $\theta$  è sempre molto più piccolo dell'angolo critico  $\alpha_C = \arctan(b/h_b)$ . In maniera analoga a 3.4.1.2, si determinano le equazioni linearizzate. Le matrici  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  vengono aggiornate per tenere conto della massa aggiunta  $M_e$  ottenendo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$



**Fig. 3.21:** Analisi parametrica: (a) Schema di accoppiamento; (b) mappe di guadagno sismiche per la registrazione del terremoto di L'Aquila; (c) mappe di guadagno sismiche per la registrazione del terremoto di Pacoima.

dove

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_A \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_C & -k_2 & (d_h + h_1)k_C \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ (d_h + h_1)k_C & 0 & -h_b Mg - (2h_b + h_e)M_e g + (d_h + h_1)^2 k_C \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Le frequenze e i modi del sistema accoppiato sono ottenuti risolvendo il seguente problema agli autovalori:

$$(K - \omega^2 M)\Psi = 0 \quad (3.41)$$

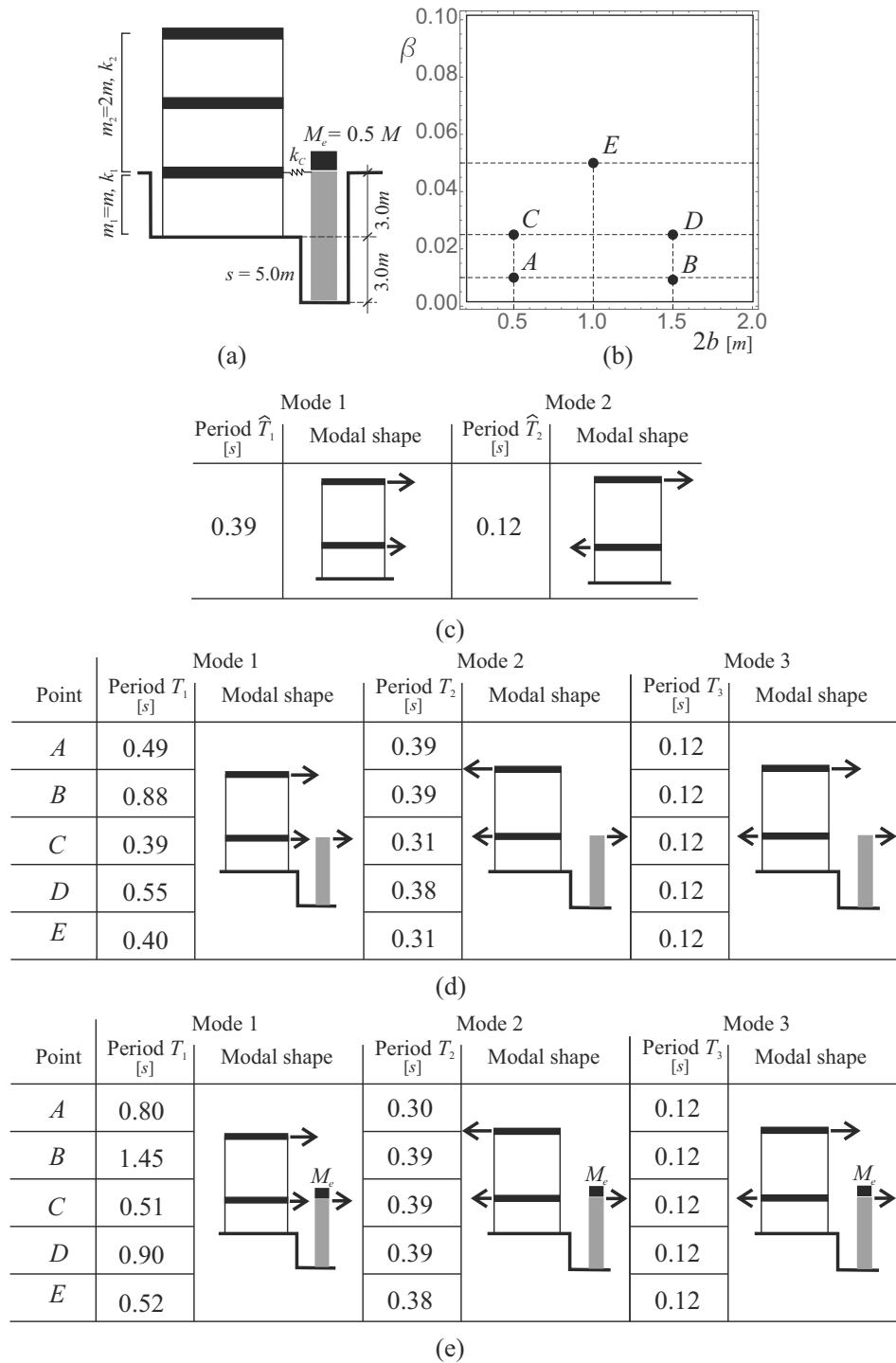
dove  $\omega$  è l'autovalore (frequenza circolare linearizzata) del sistema e  $\Psi$  è l'autovettore (modo di vibrazione). Si osserva che la matrice di rigidità è sempre definita positiva per dimensioni del blocco di interesse pratico. Il sistema linearizzato ammette pertanto tre frequenze (reali e positive) e tre modi. Le equazioni linearizzate del moto si riferiscono al blocco quando oscilla intorno al vertice destro  $B$ . Formalmente, solo il termine  $J_A$  nella matrice di massa  $M$  cambia in  $J_B$ . Tuttavia, poichè il blocco è simmetrico segue che  $J_A = J_B$ . Con riferimento al telaio a tre piani, si ottengono i tre periodi e i tre modi del sistema accoppiato. Questi sono poi comparati con i risultati dell'analisi modale del sistema non accoppiato.

Nello specifico, si riferiscono allo schema di accoppiamento di Fig. 3.22a con e senza massa aggiunta  $M_e$ . Poichè i periodi e i modi cambiano all'interno del piano dei parametri in cui le mappe sono disegnate, allora essi sono ottenuti in corrispondenza dei punti da  $A$  ad  $E$  mostrati in Fig. 3.22b. In Fig. 3.22c sono riportati i periodi e i modi della struttura non accoppiata mentre in Fig. 3.22d e Fig. 3.22e sono riportati i periodi e i modi del sistema accoppiato con e senza massa aggiunta  $M_e$ . Spostandosi all'interno del piano dei parametri  $2b - \beta$  i periodi e le forme del secondo e del terzo modo del sistema accoppiato non variano molto, sia esso con o senza massa aggiunta. In particolare le forme e le frequenze del terzo modo non subiscono alcuna variazione. Si osserva che i periodi  $\hat{T}_1$  e  $\hat{T}_2$  del sistema non accoppiato sono sempre molto vicini ai periodi  $T_2$  e  $T_3$  del sistema accoppiato. La presenza della massa aggiunta principalmente modifica il primo modo del sistema accoppiato, in quanto si ha un incremento di periodo all'aumentare di  $M_e$ .

### **3.5.5.2 Relazione tra accoppiamento e caratteristiche spettrali del terremoto**

Il periodo del secondo modo del sistema accoppiato (Fig. 3.22d e Fig. 3.22e) è sempre molto vicino al primo modo del sistema non accoppiato (Fig. 3.22c). Osservando le forme modali, il secondo modo ha una forma dove il blocco e il telaio si muovono in contro-fase, così avvicinando il funzionamento del blocco a quello di un Tuned Mass Damper. In questo caso ci si aspetta che il blocco sia capace di ridurre sia lo spostamento della sottostruttura che il

### ACCOPIAMENTO TRA TELAIO E ROCKING WALL



**Fig. 3.22:** (a) Schema di accoppiamento; (b) griglia di punti di riferimento; (c) periodi e forme modali del sistema non accoppiato; (d) periodi e forme modali del sistema accoppiato valutati nei punti di riferimento; (e) periodi e forme modali del sistema accoppiato con massa aggiunta valutati nei punti di riferimento.

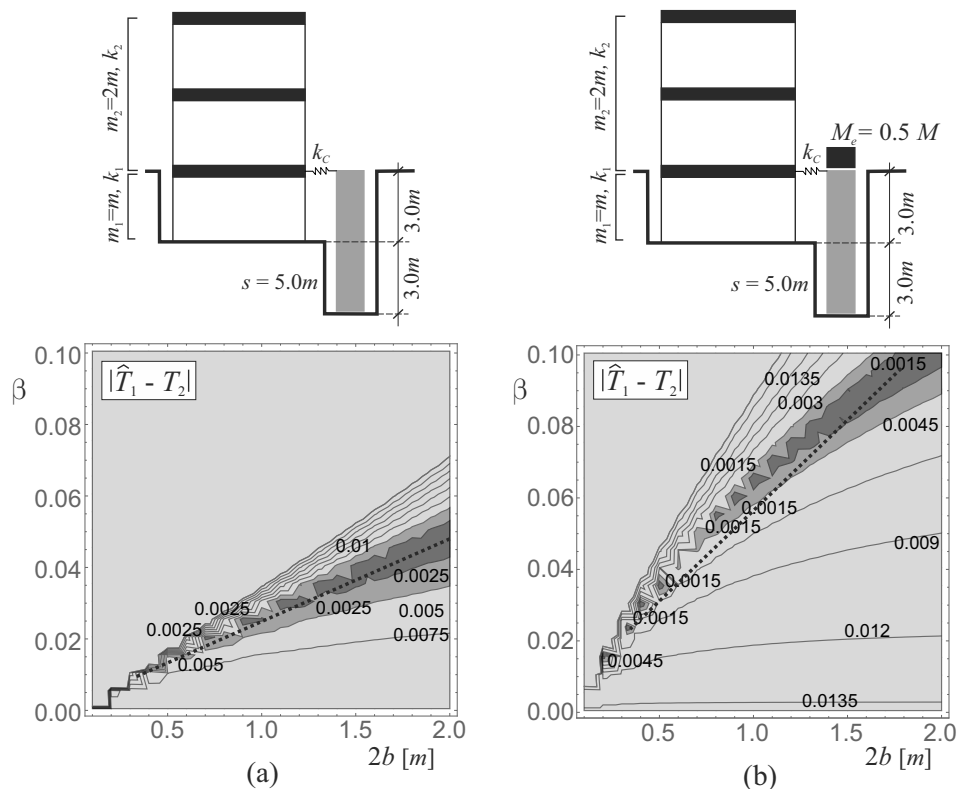
drift della sovrastruttura. Si può affermare che la migliore prestazione dell'accoppiamento del telaio con il blocco si verifica quando tale periodo è sintonizzato con l'eccitazione esterna. Infatti, i modi più eccitati sarebbero il primo modo del sistema non accoppiato, che rappresenta il telaio

prima dell'accoppiamento, e il secondo modo del sistema accoppiato dove il telaio e la parete si muovono in contro-fase. I coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , che sono il rapporto tra gli spostamenti del sistema accoppiato e quello disaccoppiato (3.20), raggiungono i valori minimi poiché gli spostamenti del sistema non accoppiato (denominatore) sono molto più alti di quelli del sistema accoppiato (numeratore). Può essere utile rappresentare nel piano di parametri  $2b - \beta$  il valore assoluto della differenza tra il periodo  $\hat{T}_1$  del primo modo non accoppiato e il periodo  $T_2$  secondo modo accoppiato. Si osserva che il periodo  $\hat{T}_1$  non varia nel piano dei parametri mentre  $T_2$  dipende sia da  $2b$  che da  $\beta$ . Il locus dove questa differenza ha il valore minimo rappresenta l'intervallo dei parametri dove è possibile avere le migliori prestazioni del sistema accoppiato, se l'eccitazione è sintonizzata con questi periodi. In Fig. 3.23 la differenza tra i periodi è mostrata sia per il sistema accoppiato senza massa aggiunta (Fig. 3.23a) che per il sistema accoppiato con massa aggiunta (Fig. 3.23b). I colori più scuri si riferiscono ai valori più piccoli di tale differenza. Le linee puntate sono quelle lungo le quali sono localizzati i punti con i valori minimi dei coefficienti  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  (Fig. 3.16 e Fig. 3.20). Tali linee hanno un'ottima corrispondenza con le zone più scure della Fig. 3.23. Si può affermare che, per i terremoti per i quali l'accoppiamento funziona bene, l'input sismico eccita in un modo non trascurabile questi due modi che hanno quasi lo stesso periodo. Per esempio, questo si verifica, in misure diverse, per le registrazioni sismiche di Kobe, L'Aquila, Newhall e Pacoima (Fig. 3.16); si verifica in maniera limitata per la registrazione di Parkfield e non si verifica affatto per quella di Erzincan (Fig. 3.18).

Per comprendere come un terremoto eccita i due modi aventi quasi lo stesso periodo si introducono due nuovi parametri.

$$\overline{Sa}_{\hat{T}_1} = \frac{1}{0.1\hat{T}_1} \int_{-0.05\hat{T}_1}^{0.05\hat{T}_1} Sa(T) dT; \quad \overline{Sa} = \frac{1}{T_B - T_A} \int_{T_A}^{T_B} Sa(T) dT \quad (3.42)$$

Il parametro  $\overline{Sa}_{\hat{T}_1}$  è il valore medio dell'accelerazione spettrale  $Sa(T)$  valutata in un intorno del periodo  $\hat{T}_1$  (primo modo non accoppiato) di ampiezza  $\pm 5\% \hat{T}_1$  e il parametro  $\overline{Sa}$  è il valore medio dello stesso spettro valutato sull'intervallo piatto dello spettro regolarizzato, tra i periodi  $T_C$  e  $T_B$  (Fig. 3.15). La differenza percentuale tra i due parametri precedenti  $\Delta S\% = 100 \cdot (\overline{Sa}_{\hat{T}_1} - \overline{Sa}) / \overline{Sa}$  è riportata in Tab. 3.3, assieme alle ampiezze dell'intervallo piatto dello spettro regolarizzato  $T_C - T_B$  per tutte e sei le registrazioni sismiche utilizzate. Valori positivi di tale differenza percentuale



**Fig. 3.23:** Mappe del valore assoluto della differenza  $\hat{T}_1 - T_2$ : (a) mappa per  $M_e = 0$ ; (b) mappa per  $M_e = 0.5M$ .

$\Delta S\%$  si riferiscono a terremoti dove l'accelerazione spettrale intorno al periodo  $\hat{T}_1$  è più alta del valore medio nell'intervallo dove il terremoto mostra la più alta potenza spettrale (intervallo piatto dello spettro). In questo caso ci si aspetta che i modi con un periodo molto vicino a  $\hat{T}_1$  sono quelli più eccitati. Al contrario, valori negativi di  $\Delta S\%$  si riferiscono a terremoti dove la potenza spettrale non è capace di eccitare i modi con periodo prossimo a  $\hat{T}_1$ .

Si osserva che le registrazioni sismiche di Pacoima e L'Aquila hanno la più alta differenza percentuale  $\Delta S\%$  delle altre registrazioni sismiche considerate. Pertanto ci si aspetta che l'accoppiamento tra telaio e blocco fornisca le prestazioni più elevate quando eccitato da queste due registrazioni. Le mappe di Fig. 3.16 confermano questa ipotesi, poiché per queste due registrazioni sismiche si ha il valore minimo dei coefficienti di guadagno. Invece Erzincan esibisce il valore più basso di differenza percentuale quindi ci si aspetta che l'accoppiamento non porti alcun vantaggio. Anche in questo caso le mappe Fig. 3.18 confermano questo fatto. Per le altre registrazioni sismiche si ha che  $|\Delta S\%| < 10\%$ , quindi l'efficacia attesa dell'accoppiamento è molto bassa e infatti le mappe relative (Fig. 3.16 e Fig. 3.18) mostrano  $\alpha_i > 0.9$  con  $i = 1, 2$ .

<i>Earthquake</i>	$T_C - T_B$	$\Delta S\%$
Erzincan	0.459	-23.94
Kobe	0.599	-9.74
L'Aquila	0.296	15.37
Newhall	0.591	-0.81
Pacoima	0.445	63.05
Parkfield	0.337	-3.56

**Tabella 3.3:** Caratteristiche dello spettro di risposta regolarizzato mostrato in Fig. 3.15a-f (linea tratteggiata).

I vantaggi associati alla massa aggiunta possono essere spiegati osservando le caratteristiche spettrali del sistema. Nello specifico, dai periodi di oscillazione del sistema accoppiato con massa aggiunta, mostrato in Fig. 3.23e, si osserva che la massa ha l'effetto principale di incrementare il periodo del primo modo accoppiato rispetto a quello del sistema senza massa aggiunta. Nel primo modo il blocco e il telaio si muovono in fase, mentre nel secondo modo accade esattamente l'opposto. Se il terremoto potesse eccitare il primo modo in maniera sostanziale, allora il vantaggio che si otterrebbe dal secondo modo sarebbe sostanzialmente ridotto se non addirittura annullato. La massa aggiunta tende a spostare il primo modo fuori dall'intervallo di massima potenza spettrale del terremoto (intervallo piatto). L'effetto finale è che il terremoto pertanto eccita principalmente il secondo modo, così garantendo prestazioni più elevate di un accoppiamento senza massa aggiunta. La massa aggiunta funziona molto bene per le registrazioni di Kobe, Newhall e Parkfield mentre ha un effetto marginale sulla registrazione di Erzincan, come mostrato in Fig. 3.20. Infatti nel caso di Erzincan sebbene le regioni di guadagno si allarghino rispetto a Fig. 3.18 ( $M_e = 0$ ), il coefficiente  $\alpha_2$  resta vicino all'unità, non portando alcun sostanziale miglioramento al comportamento della struttura. Questo si verifica perchè il periodo  $\hat{T}_1 = 0.39s$  cade esattamente in un intervallo dove lo spettro mostra una forte caduta con valori molto più piccoli di quelli negli intervalli vicini (Fig. 3.15a). Quindi, il terremoto non eccita in modo prevalente i modi con periodo vicino a quello del primo non accoppiato, ma eccita principalmente gli altri modi ai quali non è associato alcun miglioramento. La massa aggiunta non è in grado di modificare tale situazione, come è mostrato dai risultati. L'unico via percorribile per migliorare tale situazione è quella di modificare le caratteristiche modali del sistema, per esempio spostando il periodo  $\hat{T}_1$  in modo tale che cada in un range con potenza spettrale più elevata. Questo cambiamento può essere raggiunto modificando opportunamente la rigidità del sistema,

ad esempio introducendo pareti di taglio nel telaio.

Infine è utile sottolineare che il metodo qui proposto per valutare l'efficacia dell'accoppiamento a partire dalle caratteristiche spettrali del terremoto è fortemente correlato al sistema meccanico accoppiato considerato.

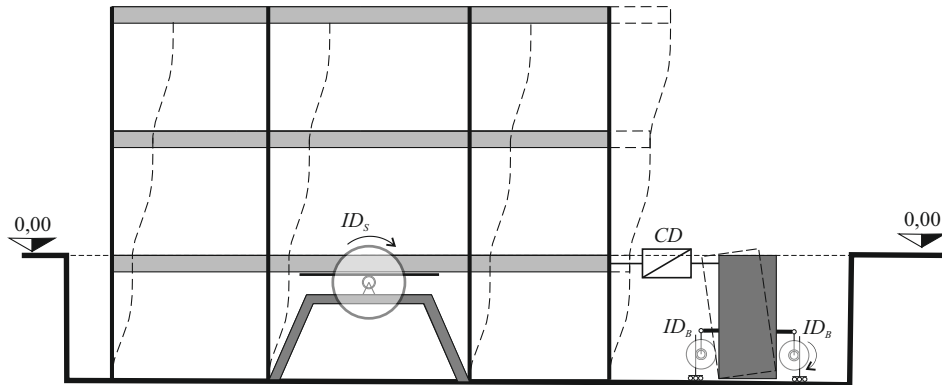
### 3.6 Utilizzo di inerter per il miglioramento delle prestazioni del sistema accoppiato

Nella sezione precedente si è visto l'utilizzo di una massa aggiunta sulla testa del blocco per migliorare le prestazioni del sistema accoppiato. Tuttavia anche con la presenza di massa aggiunta, le dimensioni del blocco restano importanti. Studi recenti ([58, 59]) hanno applicato l'inerter ad una struttura intelaiata e ne hanno studiato la risposta dinamica. Invece ([60]) ha mostrato che è possibile incrementare l'inerzia del blocco attraverso l'ausilio di inerter. In questa tesi si analizzeranno entrambi i posizionamenti dell'inerter (sia sul telaio che sul blocco) e ne verrà valutata l'efficacia nel sistema accoppiato.

#### 3.6.1 Il sistema meccanico e le equazioni del moto

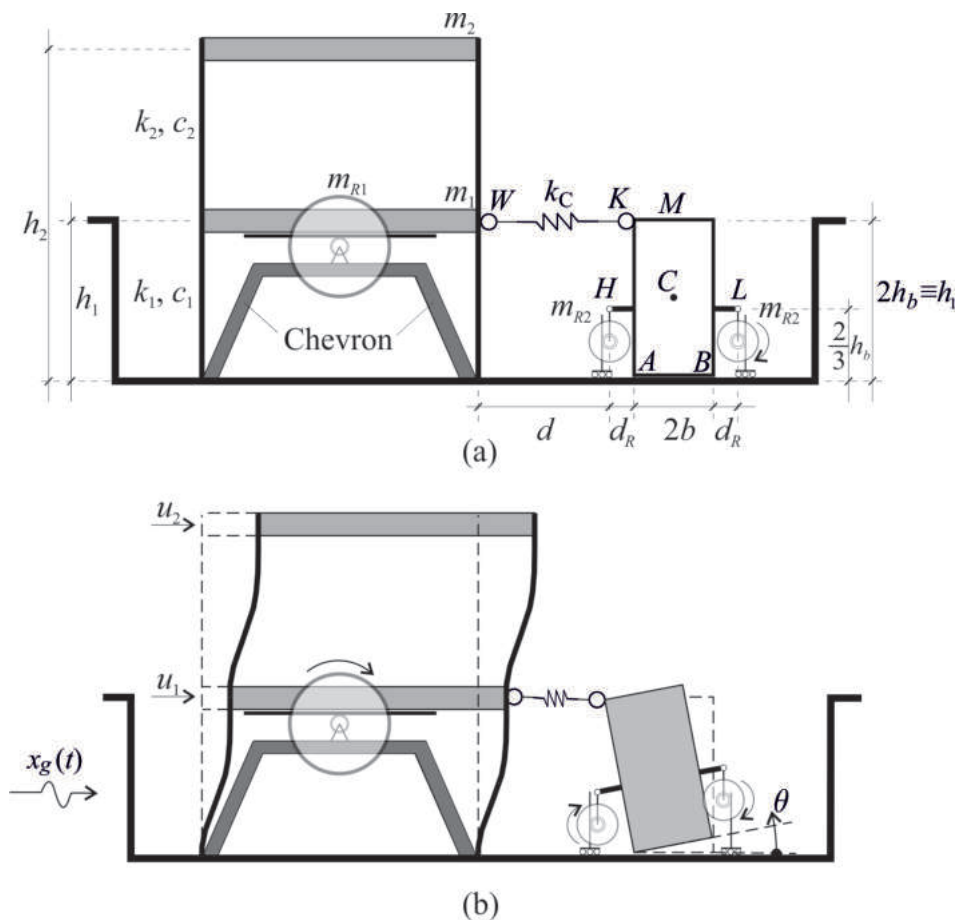
Il sistema strutturale studiato in questa sezione è rappresentato in Fig. 3.24. Analogamente al caso precedente, l'accoppiamento viene realizzato attraverso un dispositivo visco-elastico che connette il blocco al primo piano della struttura intelaiata. Non viene considerato il dispositivo esterno ED. Inoltre sono considerate due tipologie differenti di inerter. Nello specifico un dispositivo inerter viene applicato al primo piano della struttura intelaiata ( $ID_S$ ) mentre l'altro connette i lati verticali del blocco al terreno ( $ID_B$ ). Come visto nell'introduzione, gli inerter permettono di trasformare l'inerzia rotazionale di un volano in inerzia traslazionale. Il primo inerter ( $ID_S$ ) ha lo scopo di modificare le proprietà dinamiche della struttura a telaio incrementando la massa del primo piano, laddove l'altro dispositivo ( $ID_B$ ) incrementa l'inerzia rotazionale della parete esterna. Nelle sezioni precedenti si è visto che l'accoppiamento tra struttura e telaio raggiunge buone prestazioni qualora il blocco ha una massa pari a circa il 10-30% della massa totale della struttura che si vuole proteggere. Ciò implica avere pareti alte quanto uno o due piani della struttura e che possono avere anche uno spessore considerevole. In altre parole, il sistema di Fig. 3.24 è ottenuto a partire dal sistema di Fig. 3.1 dove  $k_E = c_E = 0$  e  $M_e = 0$ . Lo scopo di questo

studio è valutare se l'applicazione di inerter consente di migliorare le prestazioni del sistema accoppiato e allo stesso tempo ridurre le dimensioni del blocco così minimizzando l'impatto estetico dell'intervento.



**Fig. 3.24:** Schema di accoppiamento tra un telaio e un blocco rigido con inerter (CD: dispositivo di accoppiamento;  $ID_s$ : Inerter applicati alla struttura;  $ID_b$ : Inerter applicati al blocco).

I parametri lagrangiani e le caratteristiche geometriche dell'accoppiamento sono mostrate in Fig. 3.25.



**Fig. 3.25:** Utilizzo di inerter: (a) Inerter applicato alla sottostruttura ([58]); (b) Inerter applicato ai lati verticali del blocco ([60]).

Le equazioni del moto sono determinate dalla Eq. (3.14) e dalla (3.16) dove  $k_E = c_E = 0$ ,  $M_e = 0$ . Quando il blocco oscilla intorno al vertice A si ha:

$$\begin{aligned}
 & -k_C (d - h_1 \sin \theta - u_1) \times Q_1 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - \\
 & c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) + \underline{m_{R1}} \ddot{u}_1 = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & k_C h_1 ((u_1 - d) \cos \theta + h_1 \sin \theta) \times Q_1 - \\
 & \ddot{x}_g (h_b M \cos \theta + b M \sin \theta) + b g M \cos \theta - h_b g M + \\
 & \left( J_A + \underline{m_{R2}} ((2b + d_R) \cos(\theta) - \frac{2}{3} h_b \sin(\theta))^2 \right) \ddot{\theta} = 0
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

dove  $J_A = J_C + M(b^2 + h_b^2)$  è l'inerzia polare del blocco rispetto ad A;  $J_C$  è l'inerzia polare del blocco rispetto al suo centro C; i termini sottolineati sono riferiti agli inerter. La quantità  $Q_1$  è pari a

$$Q_1 = \frac{-d + \sqrt{d^2 - 2(d - u_1) h_1 \sin \theta - 2d u_1 - 2h_1^2 \cos^2 \theta + 2h_1^2 + u_1^2}}{\sqrt{d^2 - 2(d - u_1) h_1 \sin \theta - 2d u_1 - 2h_1^2 \cos^2 \theta + 2h_1^2 + u_1^2}} \tag{3.44}$$

Quando il blocco oscilla intorno al vertice B si ha:

$$\begin{aligned}
 & k_C (2b \cos \theta - 2b - d + h_1 \sin \theta + u_1) \times Q_3 + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - \\
 & c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + (m_1 + \underline{m_{R1}}) (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----}
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
 & k_C ((2b(2b + d) - 2b u_1 + h_1^2) \sin \theta - (d - u_1) h_1 \cos \theta) \times Q_3 - \\
 & b g M \cos \theta + \ddot{x}_g (b M \sin \theta - h_b M \cos \theta) - h_b g M \sin \theta + \\
 & \left( J_B + \underline{m_{R2}} ((2b + d_R) \cos(\theta) + \frac{2}{3} h_b \sin(\theta))^2 \right) \ddot{\theta} = 0
 \end{aligned}$$

dove  $J_B = J_C + M(b^2 + h_b^2)$  è l'inerzia polare del blocco rispetto a B; i termini sottolineati dipendono dagli inerter e la quantità  $Q_2$  è pari a

$$Q_3 = \frac{-d + \sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta (2b(2b + d) - 2b u_1 + h_1^2) + 4bd - 4b u_1 + d^2 - 2(d - u_1) h_1 \sin \theta - 2d u_1 + 2h_1^2 + u_1^2}}{\sqrt{8b^2 - 2 \cos \theta (2b(2b + d) - 2b u_1 + h_1^2) + 4bd - 4b u_1 + d^2 - 2(d - u_1) h_1 \sin \theta - 2d u_1 + 2h_1^2 + u_1^2}} \tag{3.46}$$

Poiché il blocco è simmetrico, allora  $J_A = J_B$ .

Le condizioni di impatto e di uplift restano identiche a quelle descritte

in 3.5.1.1 in cui si pone  $M_e=0$ .

### 3.6.1.1 Eccitazione sismica

Nelle analisi parametriche viene utilizzato un set di cinque registrazioni sismiche come eccitazione esterna. La selezione delle registrazioni sismiche è stata svolta tenendo in conto le caratteristiche spettrali dell'input sismico. In Fig. 3.26 si possono osservare le loro storie temporali (grafici a sinistra) e spettri di risposta elastici di pseudo-accelerazione (grafici a destra).

Qui sotto viene riportata la lista delle registrazioni utilizzate:

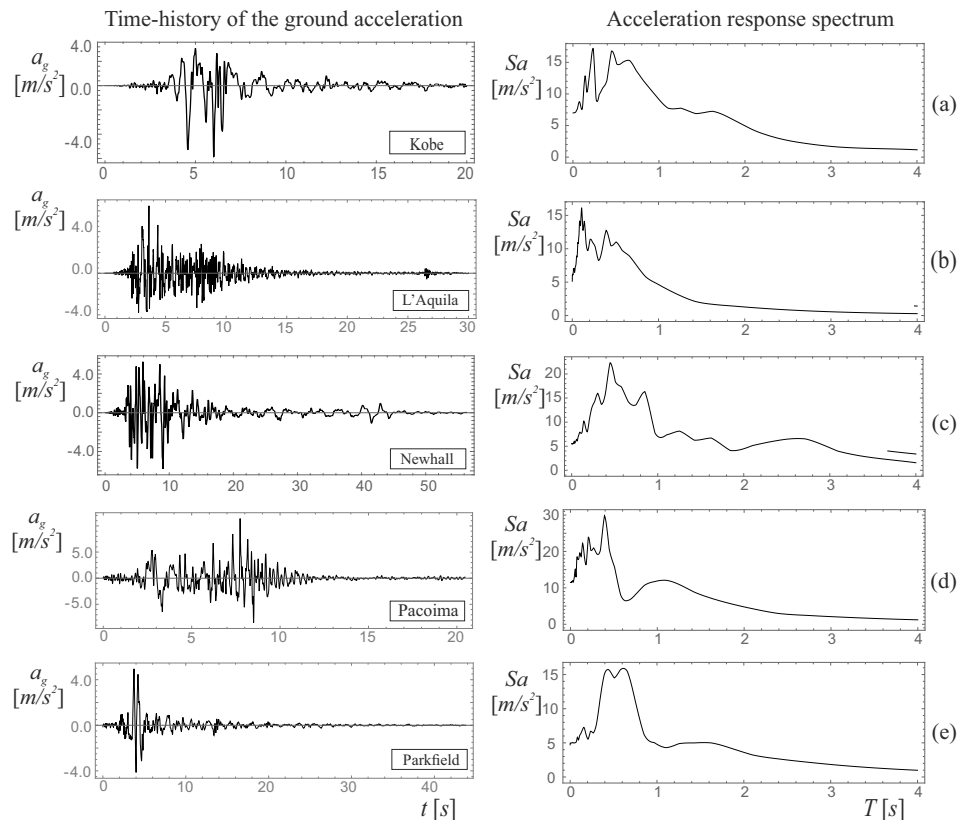
- (a) Kobe, Takarazuka-000 station, ground motion recorded during the 1995 Japan earthquake;
- (b) L'Aquila, IT.AQV.HNE.D.20090406.013240.X.ACC station, ground motion recorded during the 2009 Italian earthquake;
- (c) Newhall, Newhall-360 station, ground motion recorded during the 1994 Northridge, California earthquake;
- (d) Pacoima, Dam-164 ground motion recorded during the 1971 San Fernando, California earthquake;
- (e) Parkfield, CO2-065 ground motion recorded during the California earthquake 1966.

A seguire, ogni registrazione verrà chiamata usando il nome sottolineato.

### 3.6.2 Il ruolo degli inerter alla base del blocco ( $ID_B$ )

Il comportamento del modello generalizzato sotto eccitazione sismica viene indagato attraverso analisi parametriche nella quale i parametri variabili sono: (i) la base del blocco  $2b$ , (ii) il rapporto di rigidità di accoppiamento  $\beta = k_C/k_1$  and (iii) i rapporti di massa apparenti dei due inerter  $\sigma_1 = m_{R1}/m_1$  e  $\sigma_2 = m_{R2}/M$  (Fig. 3.2). L'analisi viene svolta integrando le equazioni del moto tenendo conto delle condizioni di uplift e di impatto. Nelle analisi che seguono non si verifica mai il ribaltamento del blocco, in quanto la rotazione non supera mai il valore critico  $\alpha_C = \arctan(b/h_b)$ . Le caratteristiche degli edifici analizzati e i valori delle caratteristiche del modello archetipo equivalente possono essere trovate in Tab. 3.1 e Tab. 3.2

In questo paragrafo si analizzano gli effetti di  $ID_B$ , pertanto non viene considerato  $ID_S$  ( $m_{R1} = 0$ ). Similmente alle sezioni precedenti, i risultati delle analisi parametriche sono organizzati in mappe di guadagno relative ai coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . La Fig. 3.27b mostra le mappe di guadagno



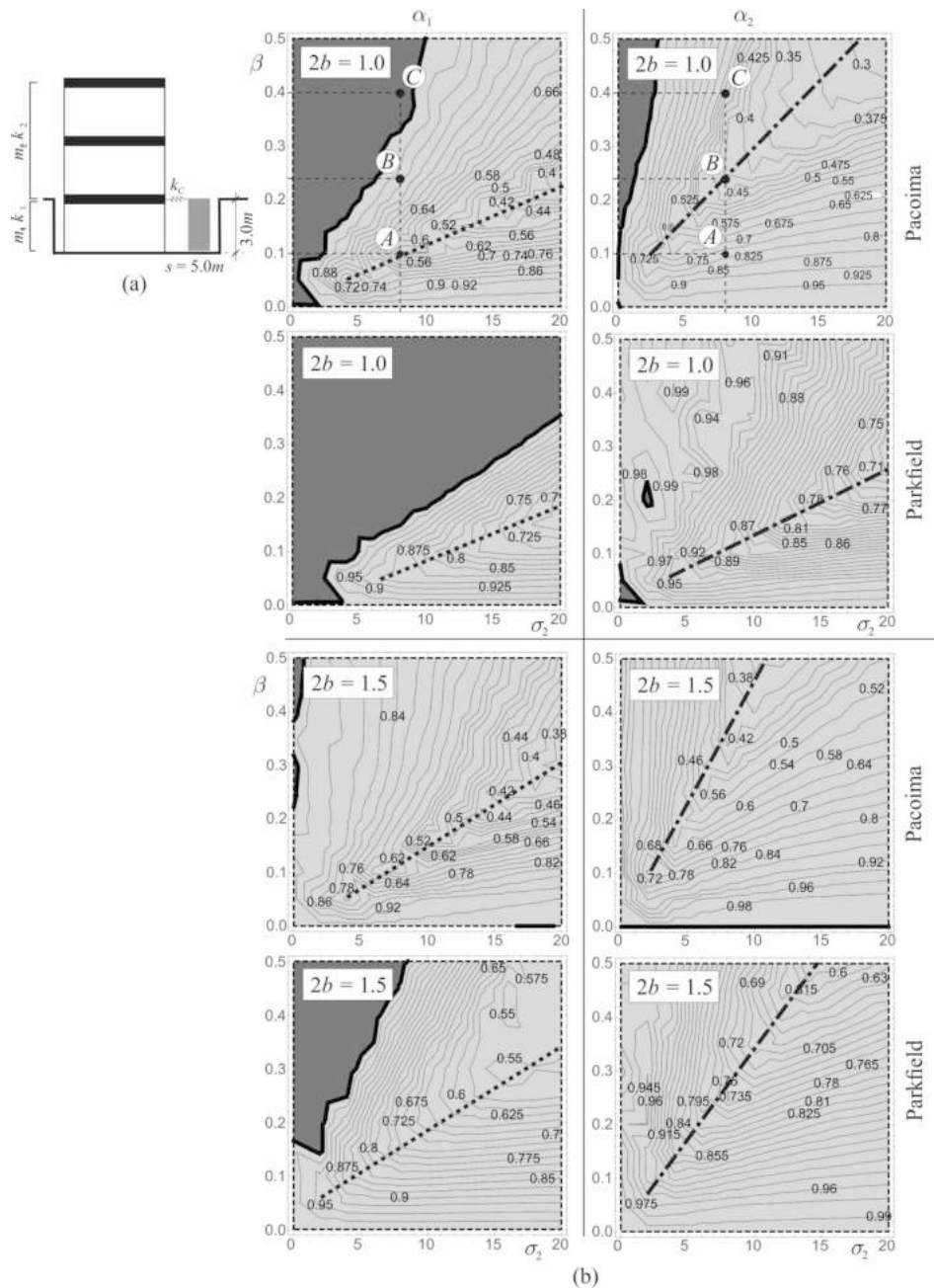
**Fig. 3.26:** Storie temporali e spettri di risposta in accelerazione dei terremoti analizzati: (a) Erzincan; (b) Kobe; (c) L'Aquila; (d) Newhall; (e) Pacoima; (f) Parkfield.

di un telaio a tre piani (prima riga di Tab. 3.1 e Tab. 3.2) le cui caratteristiche geometriche dell'accoppiamento sono mostrate in Fig. 3.27a. Le mappe sono organizzate a forma di matrice dove ogni colonna si riferisce a un coefficiente di guadagno ( $\alpha_1$  and  $\alpha_2$ ) e ogni riga si riferisce ad una diversa registrazione sismica o ad un diverso valore della base del blocco. Nello specifico, la prima e seconda riga si riferiscono alle registrazioni di Pacoima e Parkfield dove  $2b = 1.0$  m. La terza e quarta riga si riferiscono nuovamente a Pacoima e Parkfield, ma considerando una base del blocco di  $2b = 1.5$  m. Dalle mappe si osserva che l'efficacia dell'accoppiamento incrementa quando  $\sigma_2$  cresce, dal momento che le regioni di guadagno si allargano e i coefficienti di guadagno diminuiscono. Inoltre, quando  $\sigma_2 = 0$  (non sono presenti inerti) l'efficienza dell'accoppiamento è molto bassa. Infatti in tal caso la massa della parete è troppo piccola rispetto alla massa totale del telaio (inferiore al 10% per un blocco di base  $2b = 1.0$ ) e non riesce a mitigare gli spostamenti della struttura. Analogamente a quanto riscontrato in 3.5, anche in queste mappe i punti di minimo relativo delle mappe di guadagno si dispongono lungo una linea retta. In particolare, le linee puntate si riferiscono ai minimi del coefficiente  $\alpha_1$  mentre le linee tratto-punto si riferiscono ai minimi del coefficiente  $\alpha_2$ . Inoltre,

le linee relative ai punti di minimo del coefficiente  $\alpha_1$  non dipendono dal terremoto ma soltanto dalla dimensione della base della parete. Infatti, le linee puntate nelle prime due righe di Fig. 3.27b sono le stesse. La stessa cosa si verifica nelle linee puntate della terza e quarta riga di Fig. 3.27b. Al contrario le linee di minimo relativo ad  $\alpha_2$  dipendono dall'eccitazione sismica considerata. Per capire il funzionamento del sistema accoppiato in presenza di inerter, vengono discusse alcune storie temporali estratte dai punti  $A$ ,  $B$  e  $C$  della Fig. 3.27b.

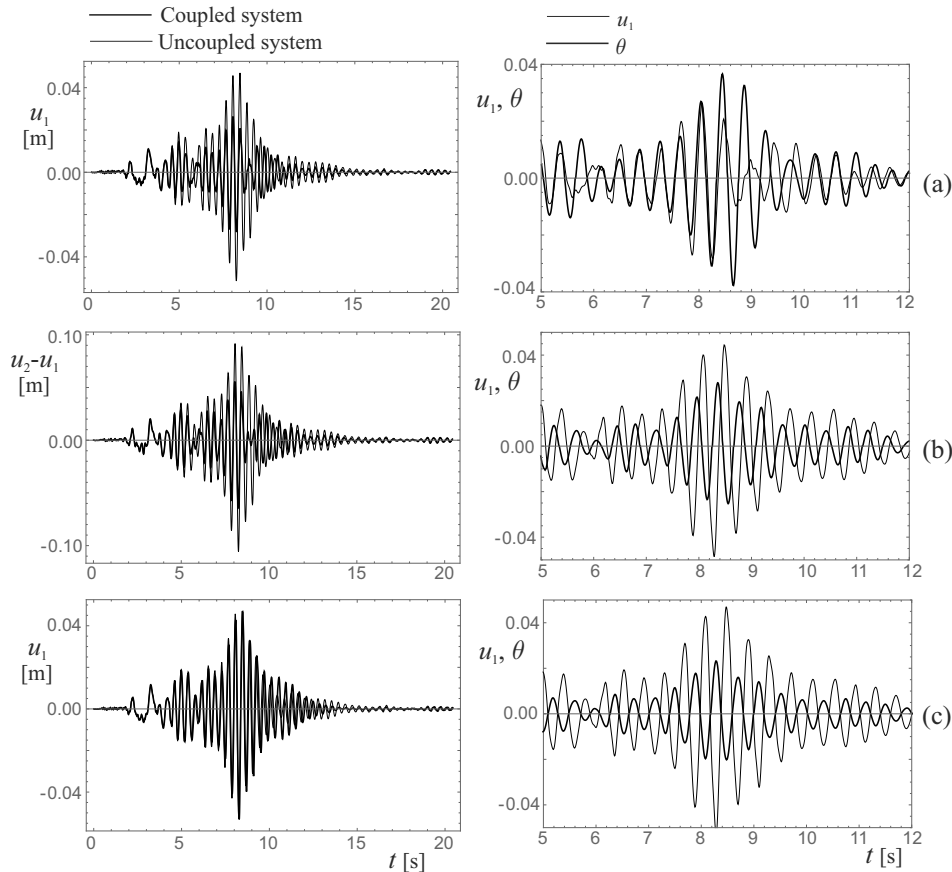
La Fig. 3.28a mostra le storie temporali dello spostamento  $u_1$  e dell'angolo di rocking  $\theta$  del sistema le cui caratteristiche sono indicate da  $A$ . Il punto  $A$  ( $\sigma_2 = 8, \beta = 0.10$ ) appartiene alla linea di minimo di  $u_1$  (linea puntata) e cade in entrambe le regioni di guadagno per  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . La storia temporale di  $u_1$  (Fig. 3.28a) mostra che il sistema accoppiato manifesta un'ampiezza di spostamento  $u_1$  inferiore a quella della struttura non accoppiata. Inoltre, la comparazione delle storie temporali di  $u_1$  e  $\theta$  mostrata nel grafico a destra di Fig. 3.28a evidenzia come il blocco e la sottostruttura si muovano fundamentalmente in contro-fase (vedere la convenzione dei segni di positività di Fig. 3.2). Pertanto, anche quando sono presenti degli inerter, esistono ancora zone nel piano dei parametri dove il blocco può comportarsi come una sorta di Tuned Mass Damper per la struttura. Le storie temporali del sistema le cui caratteristiche sono indicate con  $B$  sono mostrate in Fig. 3.28b. Il punto  $B$  ( $\sigma_2 = 8, \beta = 0.24$ ) giace sulla curva di minimo di  $\alpha_2$  (linea tratto-punto) e cade nella regione di guadagno per entrambi i coefficienti. Di conseguenza si osserva un valore del drift  $u_2 - u_1$  del sistema accoppiato inferiore a quello del telaio non accoppiato. L'osservazione del grafico sulla destra di Fig. 3.28b mostra che il blocco è leggermente fuori fase rispetto al movimento della sottostruttura. In questo caso il blocco non funziona perfettamente come un Tuned Mass Damper, ma lo spostamento di fase tra  $u_1$  e  $\theta$  è in grado di assicurare ancora una riduzione degli spostamenti. Infine, il punto  $C$  ( $\sigma_2 = 8, \beta = 0.40$ ) si trova all'esterno della regione di guadagno di  $\alpha_1$  ma all'interno di quella di  $\alpha_2$ . Pertanto l'ampiezza di  $u_1$  del sistema accoppiato (Fig. 3.28c) è più alta di quella del telaio non accoppiato. In questo caso il grafico a destra di Fig. 3.28c mostra che il moto del blocco è quasi in fase con il moto della sottostruttura, incrementando lo spostamento  $u_1$  rispetto al telaio non accoppiato.

Le stesse mappe sono poi ottenute per un telaio a cinque piani (seconda riga di Tab. 3.1 e Tab. 3.2) accoppiato ad un blocco di base  $2b = 1.5\text{m}$  ed equipaggiato con inerter. Le caratteristiche geometriche dell'accop-



**Fig. 3.27:** Mappe di guadagno: (a) Schema geometrico di accoppiamento e (b) mappe  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per due differenti valore della dimensione della base del blocco ( $2b = 1.0m$ ,  $2b = 1.5m$ ) e due registrazioni sismiche (Pacoima and Parkfield), ( $\gamma_1 = 0$ ).

piamento sono mostrate in Fig. 3.29a mentre le mappe di guadagno di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , ottenute per tre differenti registrazioni sismiche (Kobe, L'Aquila e Newhall) sono riportate in Fig. 3.29b. Si osserva che, anche nel caso di un telaio di dimensioni maggiori, l'accoppiamento è ancora in grado di fornire ampie regioni di guadagno nel piano dei parametri. L'efficacia dell'accoppiamento inoltre migliora quando cresce  $\sigma_2$ , evidenziando il ruolo fondamentale dell'inerter in questo tipo di sistema. Analogamente a

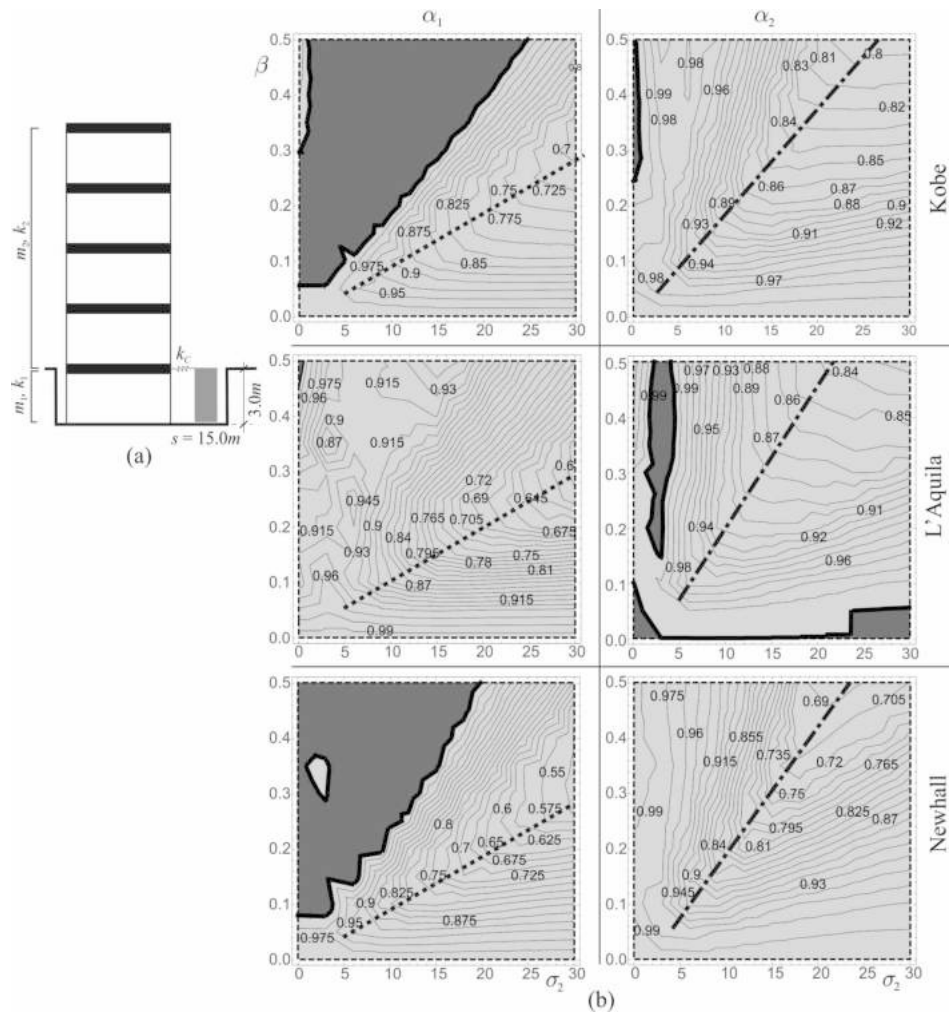


**Fig. 3.28:** Storie temporali considerata la registrazione sismica di Pacoima nei punti (a) Point A ( $\sigma_2 = 8, \beta = 0.10$ ); (b) Point B ( $\sigma_2 = 8, \beta = 0.24$ ); (c) Point C ( $\sigma_2 = 8, \beta = 0.40$ ) della Fig. 3.27b.

quanto riscontrato in Fig. 3.27b, anche in Fig. 3.29b le linee di minimo relative ad  $\alpha_1$  (linee puntate) non dipendono dal terremoto al contrario le linee di minimo relative ad  $\alpha_2$  (linee tratto-punto) variano a seconda della registrazione sismica considerata.

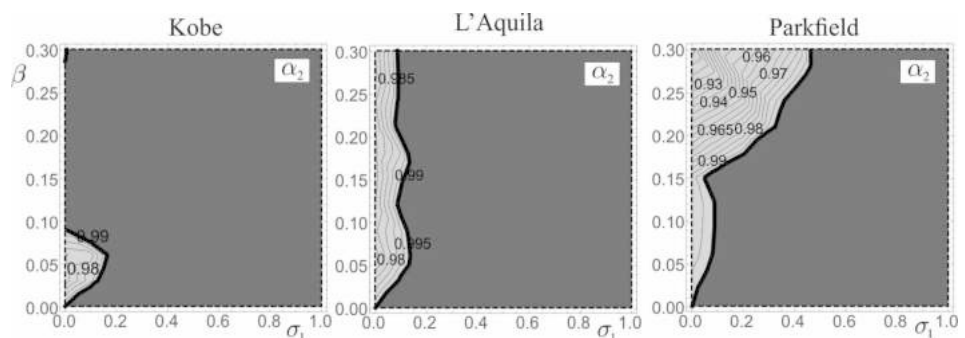
### 3.6.3 Il ruolo dell'inerter sul telaio (ID<sub>S</sub>)

In questa sezione si analizza l'effetto di ID<sub>S</sub>. Gli ID<sub>B</sub> non sono considerati ( $m_{R2} = 0$ ). Le analisi parametriche sono svolte in funzione di  $(2b; \sigma_1)$ . La Fig. 3.30 mostra le mappe di guadagno relative ad  $\alpha_2$  per il telaio a tre piani. I risultati mostrano che, qualunque sia il segnale sismico considerato, l'utilizzo di inerter applicati direttamente al telaio è sempre dannoso. Infatti quando il rapporto di massa dell'inerter  $\sigma_1$  incrementa, le regioni di guadagno si riducono e i coefficienti di guadagno tendono a superare l'unità. L'utilizzo di un inerter applicato al primo piano del telaio incrementa virtualmente la massa totale della struttura rispetto alla massa della parete. Questo fatto diminuisce l'abilità del blocco di ridurre gli spostamenti



**Fig. 3.29:** Mappe di guadagno: (a) Schema geometrico di accoppiamento e (b) mappe  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per tre registrazioni sismiche (Kobe, L'Aquila e Newhall), ( $2b = 1.5 m$ ,  $\sigma_1 = 0$ ).

del telaio, in quanto la massa del blocco diventa sempre più piccola di quella del telaio (che cresce per effetto degli inerter) fino a quando non è più in grado di contrastare gli spostamenti del telaio.



**Fig. 3.30:** Mappe di guadagno per tre registrazioni sismiche (Kobe, L'Aquila e Parkfield), ( $2b = 1.5m$ ,  $\sigma_2 = 0$ ).

### 3.6.4 Interpretazione dei risultati ottenuti

Analogamente a quanto fatto nelle sezioni precedenti, un'analisi modale del sistema linearizzato verrà effettuata a supporto dei risultati ottenuti. In particolare si vuole osservare come gli inerter intervengano sulle forme modali. Le equazioni linearizzate del sistema accoppiato, non smorzato e omogeneo sono ottenute espandendo le equazioni non lineari del moto (3.43) in serie di McLaurin fino al primo ordine, rispetto ai parametri lagrangiani  $u_1, u_2$  e  $\theta$ . Poiché si è visto che  $m_{R1}$  diminuisce le prestazioni del sistema accoppiato, allora in questa analisi si considera  $m_{R1} = 0$ . Le equazioni linearizzate quando il blocco oscilla intorno al vertice A sono:

$$\mathbf{M}\ddot{\Phi} + \mathbf{K}\Phi = \mathbf{0} \quad (3.47)$$

dove

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_A + m_{R2}(2b + d_R)^2 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_C & -k_2 & h_1 k_C \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ h_1 k_C & 0 & -h_b Mg + h_1^2 k_C \end{bmatrix}$$

Le frequenze e i modi del sistema sono ottenuti risolvendo il seguente problema agli autovalori

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\Psi = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

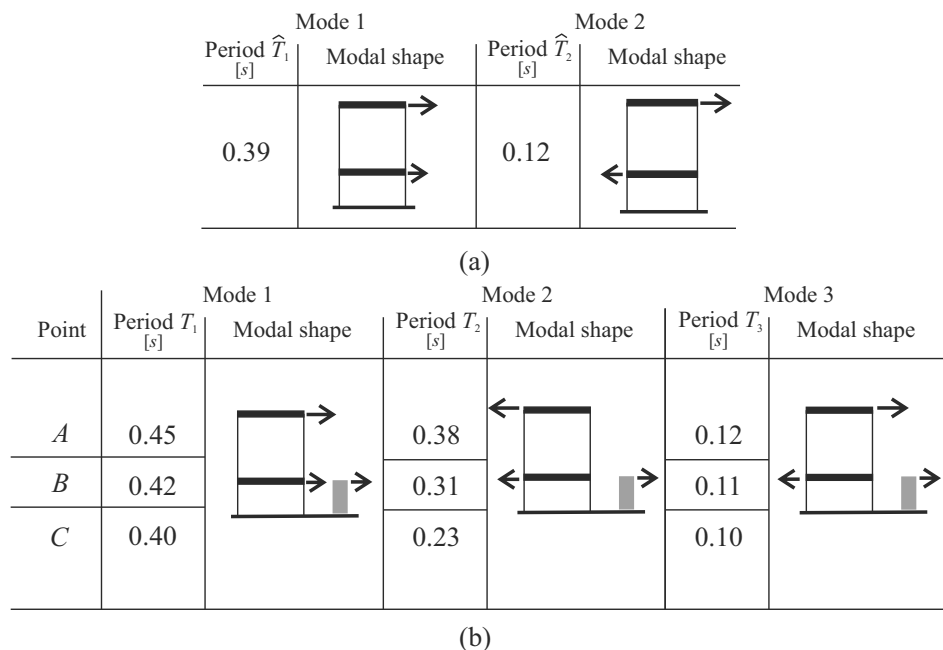
dove  $\omega$  è l'autovalore (frequenza circolare linearizzata) del sistema e  $\Psi$  è l'autovettore (modo di vibrare). Per valori delle dimensioni del blocco di interesse pratico, la matrice di rigidità  $\mathbf{K}$  è sempre definita positiva. Il sistema linearizzato ammette tre frequenze (reali e positive) e tre modi.

Le equazioni linearizzate del moto che si riferiscono al blocco che oscilla intorno al vertice B sono esattamente uguali alle (3.47) e (3.48). Formalmente solo il termine  $J_A$  nella matrice di massa  $\mathbf{M}$  cambia in  $J_B$ . Comunque, poichè il blocco è simmetrico, allora  $J_A = J_B$ . In riferimento ad un telaio a tre piani, vengono prima ottenuti i tre periodi e forme modali del sistema accoppiato e poi sono comparati con quelli del sistema non accoppiato. Poichè i modi e i periodi variano all'interno del piano dei parametri in cui sono disegnate le mappe, essi sono ottenuti in specifici punti indicati dalle lettere A, B e C nella Fig. 3.27. Nella Fig. 3.31a sono riportati i due periodi  $\hat{T}_1$  e  $\hat{T}_2$  e i due modi della struttura non accoppiata, mentre nella Fig. 3.31b sono riportati i periodi e i modi del sistema accoppiato. Come si

può osservare, il periodo del terzo modo accoppiato è sempre molto vicino al periodo del secondo modo non accoppiato. In corrispondenza del punto A, localizzato sulla curva di minimo relativo ad  $\alpha_1$ , il periodo  $\hat{T}_1$  del sistema non accoppiato è molto vicino al periodo  $T_2$  del sistema accoppiato. Nel secondo modo accoppiato il telaio e il blocco si muovono in contro-fase, così il blocco può comportarsi come una sorta di Tuned Mass Damper per il telaio. E' importante ricordare che nei blocchi rigidi il periodo di oscillazione dipende dall'ampiezza di oscillazione (Fig. 1.8). Una volta che il blocco inizia a spostarsi in contro-fase, è capace di proseguire questo movimento in contro-fase anche quando le caratteristiche del moto cambiano nel tempo, in quanto il blocco può mantenere la sintonizzazione modificando opportunamente l'ampiezza di oscillazione. La migliore prestazione dell'accoppiamento si verifica quando l'azione esterna è in grado di eccitare sufficientemente tale modo.

Come già osservato in precedenza, le curve di minimo di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  non coincidono. Questo implica che i parametri che minimizzano  $\alpha_1$  non minimizzano anche  $\alpha_2$ . Il punto B è localizzato sulla curva di minimo di  $\alpha_2$  e ha la stessa massa apparente  $\sigma_2$  del punto A, ma un valore più elevato del rapporto di rigidezza  $\beta$ . Quindi in generale abbiamo un irrigidimento del sistema accoppiato. Infatti entrambi i periodi  $T_1$  e  $T_2$  del primo e del secondo modo accoppiato diminuiscono (Fig. 3.31 b). Il periodo  $\hat{T}_1$  del primo modo del sistema disaccoppiato si trova ora tra i precedenti due. Se l'azione esterna eccita sufficientemente il primo modo non accoppiato, essa agisce anche su entrambi i primi due modi del sistema accoppiato in maniera comparabile. L'interazione tra questi due modi accoppiati non è capace di minimizzare lo spostamento  $u_1$  del primo piano, poiché il funzionamento a Tuned Mass Damper del blocco relativo al secondo modo è ostacolato dal movimento in-fase causato dal primo modo. Tuttavia, gli effetti di queste due modi si combinano in modo tale che il drift del sistema accoppiato è più piccolo di quello del sistema non accoppiato, così minimizzando il coefficiente  $\alpha_2$ .

Il punto C si trova fuori dalle regioni di guadagno  $\alpha_1$  ma all'interno delle zone di guadagno di  $\alpha_2$ . Si verifica un ulteriore irrigidimento del sistema accoppiato poiché  $\beta$  è più elevato rispetto ai due punti precedenti analizzati. Ora il periodo  $T_1$  del primo modo accoppiato è molto vicino al periodo  $\hat{T}_1$  del primo modo non accoppiato. E quindi questi due modi sono eccitati in maniera simile e il coefficiente  $\alpha_1$  risulta sopra l'unità.



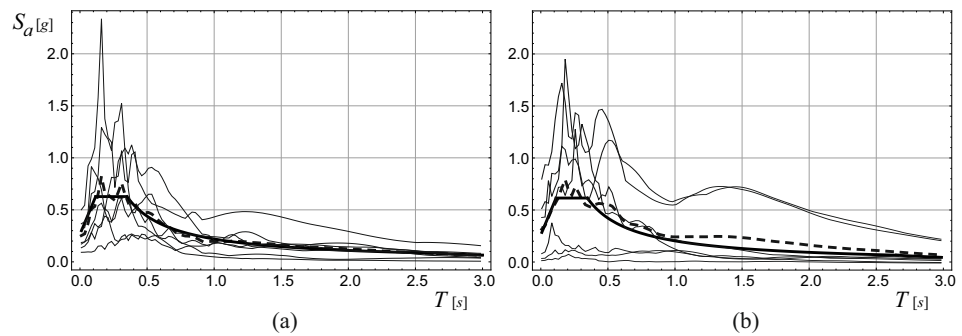
**Fig. 3.31:** Frequenze e forme modali del sistema linearizzato (a) telaio isolato; (b) sistema accoppiato ( $\sigma_1 = 0$ ).

### 3.6.5 Analisi di spettro-Compatibilità

Si fa notare che l'utilizzo di una singola registrazione sismica produce mappe di interesse limitato dovuto alla loro stretta relazione con il contenuto in frequenza della specifica registrazione. Pertanto, in modo da avere mappe di significato più generale, l'analisi viene svolta considerando diversi set di registrazioni sismiche. Le registrazioni sismiche che compongono un set rispettano i criteri di spettro-compatibilità. Così il compito dell'analisi è creare mappe di guadagno relative ad uno specifico spettro di progetto e non ad una particolare registrazione sismica.

Sono considerati due differenti set di sette registrazioni naturali non scalate. Ogni set di registrazioni è stato selezionato per essere spettro-compatibile con lo spettro di progetto elastico per il sito di L'Aquila (Italy), fornito dalle NTC2008. Nello specifico, questo spettro di progetto è relativo allo stato limite di salvaguardia delle vite (SLV) ed è basato su una probabilità di eccedenza del 10% in 50 anni, equivalente ad un periodo di ritorno di 475 anni. I dettagli sulla scelta della registrazioni e sul criterio di spettro-compatibilità sono già stati discussi nei paragrafi 2.4.0.1 e 2.4.5. La Fig. 3.32 mostra gli spettri dei due set di registrazioni sismiche. In particolare si distinguono gli spettri del singolo terremoto (linee sottili), spettro target (linea spessa) e lo spettro medio (linea spessa tratteggiata). Le principali caratteristiche dei due set di registrazioni sismiche sono riportate in Appendice

A.2.



**Fig. 3.32:** Spettri dell'eccitazione sismica: (a) Primo set di sette registrazioni (Set 1); (b) Secondo set di sette registrazioni (Set 2)

### 3.6.5.1 Coefficienti di guadagno medi

Gli spettri di risposta sono ottenuti come media aritmetica dei massimi valori della risposta, considerando almeno sette differenti registrazioni sismiche. La stessa procedura è utilizzata per costruire le mappe di guadagno relative ad uno spettro di progetto. Pertanto sulla base di ciò, si introduce una nuova definizione degli indicatori di guadagno. Nello specifico:

$$\alpha_{M1} = \frac{\overline{|u_{1\max}|}}{\overline{|\tilde{u}_{1\max}|}}; \alpha_{M2} = \frac{\overline{|(u_2 - u_1)_{\max}|}}{\overline{|\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)_{\max}|}} \quad (3.50)$$

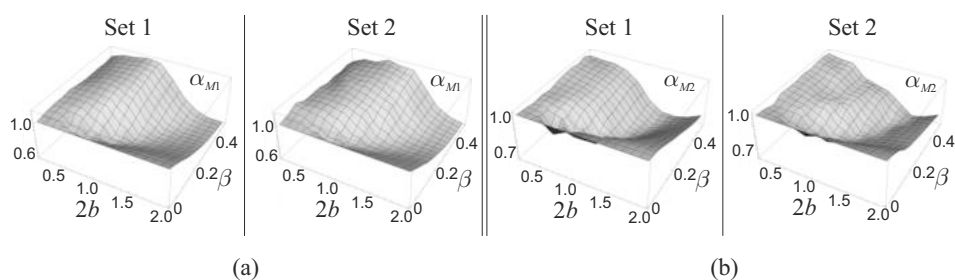
dove  $\overline{|u_{1\max}|}$  è la media degli spostamenti massimi  $u_1(t)$  del sistema accoppiato ottenuta per il gruppo di registrazioni sismiche spettro-compatibili;  $\overline{|(u_2 - u_1)_{\max}|}$  è la media dei massimi drifts  $u_2(t) - u_1(t)$  del sistema accoppiato. Il simbolo tilde si riferisce agli spostamenti  $u_1$  e al drift  $u_1 - u_2$  del telaio non accoppiato.

In maniera simile ai coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , anche i coefficienti  $\alpha_{M1}$  e  $\alpha_{M2}$  esprimono la misura dell'efficacia della strategia di protezione considerata. Più il valore di  $\alpha_{Mi}$  ( $i = 1, 2$ ) è inferiore all'unità, più alta sarà l'efficacia della strategia di protezione.

### 3.6.5.2 Mappe di guadagno medie

I parametri  $\alpha_{M1}$  e  $\alpha_{M2}$  sono rappresentati, analogamente a quanto fatto nelle sezioni precedenti, in uno specifico piano di parametri  $(\beta, 2b)$ . Poiché  $\alpha_{M1}$  e  $\alpha_{M2}$  sono coefficienti di guadagno medi, allora anche le mappe saranno mappe di guadagno medie. La Fig. 3.33 mostra le superfici di guadagno relative ai due coefficienti  $\alpha_{M1}$  and  $\alpha_{M2}$  per i due set di registrazioni sismiche. Le caratteristiche del telaio considerato e del corrispettivo

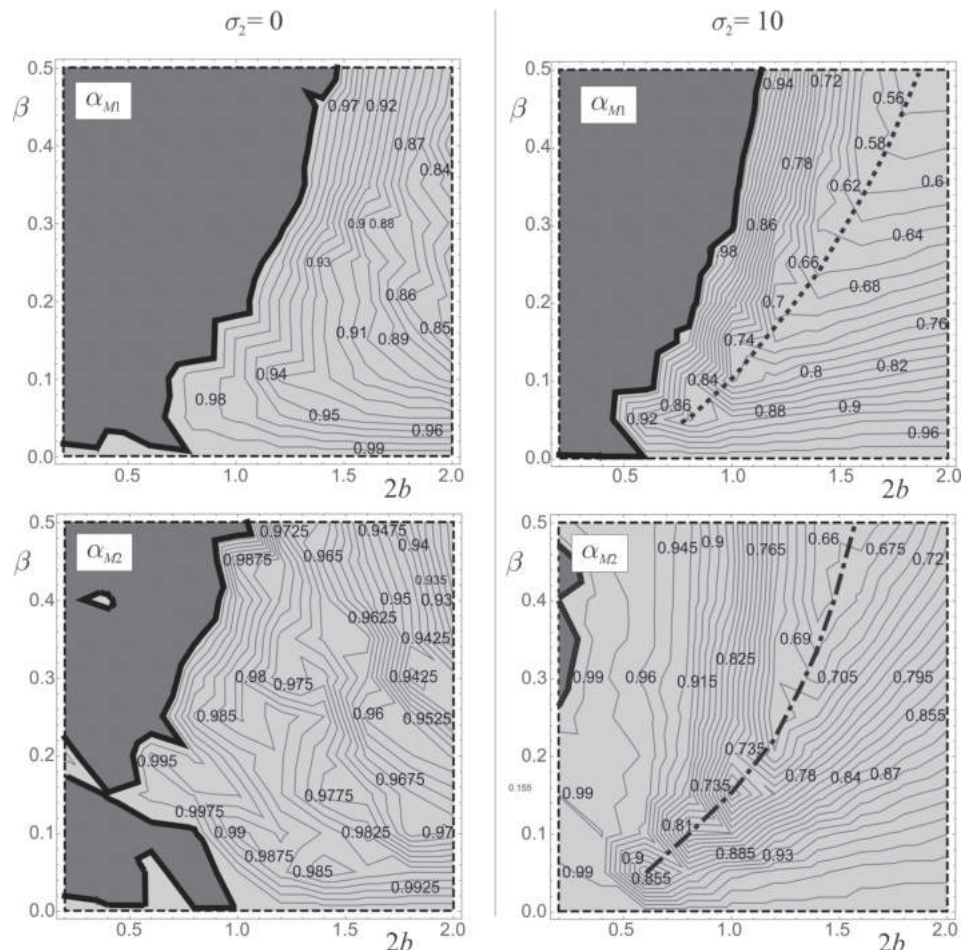
modello archetipo possono essere trovate nella prima line di Tab. 3.1 e Tab. 3.2. Le superfici sono ottenute considerando  $\sigma_1 = 0$  e  $\sigma_2 = 10$ . Si nota subito che le superfici sono piuttosto simili. Sebbene l'intero sistema meccanico è non lineare a causa della presenza del blocco rigido, la similarità tra le due superfici suggerisce che il comportamento del sistema è prossimo ad essere lineare poiché le oscillazioni del blocco si mantengono molto piccole. Ricordando il significato di spettro-compatibilità e prendendo in conto che i due set di registrazioni sono compatibili con lo stesso spettro, i coefficienti di guadagno medi forniscono le stesse superfici di guadagno. Infatti i coefficienti di guadagno sono definiti usando la media delle risposte massime, esattamente come nel metodo di costruzione dello spettro medio. Le piccole differenze tra le superfici possono essere attribuite alla piccola differenza tra gli spettri medi dei due set ( Fig. 3.32). Tuttavia, se si aumentasse il numero di registrazioni all'interno di ogni set, tale differenza diminuirebbe. Pertanto si può affermare che i coefficienti di guadagno medi dipendono solamente dallo spettro di progetto, qualunque esso sia.



**Fig. 3.33:** Superfici di guadagno medie dei due set di registrazioni: (a) superficie  $\alpha_{M1}$ ; (b) superficie  $\alpha_{M2}$

La Fig. 3.34 mostra le mappe di guadagno medie di  $\alpha_{M1}$  e  $\alpha_{M2}$  nel piano dei parametri  $2b - \beta$ . Le mappe nella colonna di sinistra si riferiscono al caso senza inerter, mentre nella colonna di destra ci sono le mappe ottenute in presenza di  $ID_B$  dove  $\sigma_2 = 10$ . Poichè in precedenza si è visto che la presenza di  $ID_S$  è sempre dannosa, in queste analisi non sono mai considerati ( $\sigma_1 = 0$ ). Si può osservare che in entrambi i casi esistono regioni di guadagno, ovvero zone dove l'accoppiamento con una rocking wall mitiga la risposta sismica del telaio. Tuttavia quando non ci sono inerter (colonna di sinistra) i coefficienti  $\alpha_{M1}$  e  $\alpha_{M2}$  sono molto vicini all'unità e quindi non vi è un vantaggio sostanziale per la struttura accoppiata. Invece la presenza di inerter alla base del blocco (colonna a destra) è in grado di assicurare vantaggi sostanziali poiché entrambi i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità. La curva puntata sulla mappa di  $\alpha_{M1}$  è il luogo dei minimi di  $\alpha_{M1}$  nel piano dei parametri  $2b - \beta$ . Le coppie di parametri  $2b$  e  $\beta$  lungo

queste curve rappresentano la scelta migliore per il sistema accoppiato, in quanto vi è una maggiore riduzione dello spostamento  $u_1$ . Il valore minimo del coefficiente  $\alpha_{M1}$  si verifica quando la frequenza del primo modo non accoppiato è molto vicina a quella del secondo modo del sistema accoppiato, poiché il blocco e il telaio si muovono in contro-fase. Questo comportamento è già stato evidenziato in 3.6.4. Il locus dei minimi di  $\alpha_{M2}$  (linea tratto-punto) non coincide con quello di  $\alpha_{M1}$ . In un processo di predimensionamento del sistema, la scelta dei parametri di accoppiamento sulla linea di minimo di  $\alpha_{M2}$  garantisce la minimizzazione del drift  $u_2 - u_1$ . Comunque, poiché le due curve di minimo, sebbene non coincidenti, sono molto vicine l'un altro, una scelta dei parametri di progetto  $2b - \beta$  sulla curva di minimo di  $\alpha_{M2}$  assicura una buona riduzione anche allo spostamento del piano connesso al blocco.



**Fig. 3.34:** Superfici di guadagno medie relative al Set 1 in assenza di inerter ( $\sigma_2 = 0$ ) e con inerter ( $\sigma_2 = 10$ )

Il criterio di spettro compatibilità è uno strumento utile per svolgere un predimensionamento delle caratteristiche del sistema accoppiato.

### 3.7 Validazione sperimentale del modello

In questa sezione viene realizzato un setup sperimentale che rappresenta l'accoppiamento tra un telaio e un blocco rigido. Si vuole rimarcare che lo scopo di questa indagine sperimentale è la validazione del modello analitico scritto in precedenza. Il sistema esaminato non è rappresentativo di alcuna struttura reale. Infatti, la descrizione del moto di rocking fornita da Housner ([31]) rappresenta correttamente solo le principali caratteristiche non lineari del moto. Molti altri modelli ([86, 87, 88]) sono stati proposti per descrivere in maniera più accurata gli impatti con il supporto alla base e la perdita di energia che si verifica ad ognuno di essi. Poiché il modello analitico e quello sperimentale potrebbero differire per le ragioni suddette, è necessario effettuare un confronto diretto tra i due modelli.

#### 3.7.1 Modello analitico

Il modello analitico è composto da un telaio shear-type a 2-GDL accoppiato, a livello del primo piano, ad un blocco rigido attraverso un organo elastico. La Fig. 3.35 mostra lo schema di accoppiamento. Esso è lo stesso modello mostrato in Fig. 3.1 dove  $m_{R1} = m_{R2} = 0$ ,  $M_e = 0$ ,  $k_E = c_E = 0$  e  $c_C = 0$ .

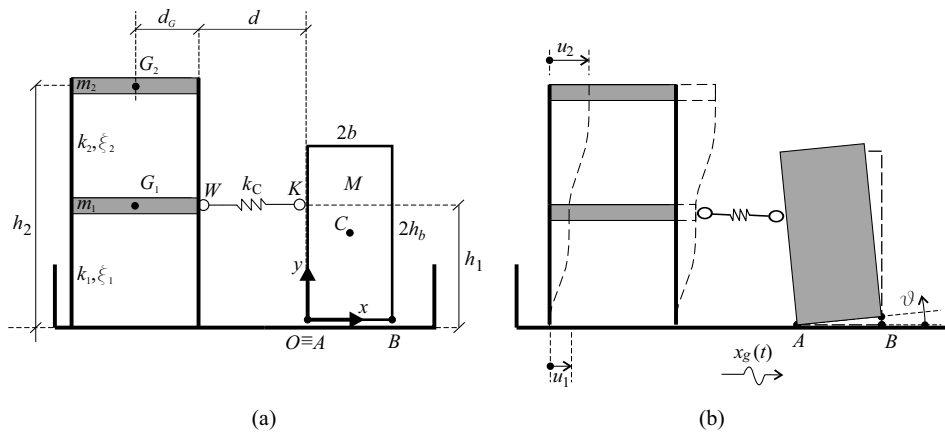


Fig. 3.35: Modello analitico dell'accoppiamento

Il blocco non può scorrere e non può subire un "free-flight motion" e quindi vi possono essere solamente oscillazioni da moto di rocking. Le equazioni del moto sono le stesse di (3.14) e (3.15) dove  $m_{R1} = m_{R2} = 0$ ,  $M_e = 0$ ,  $k_E = c_E = 0$  e  $c_C = 0$ . L'equazione del moto<sup>3</sup> quando il blocco oscilla intorno al vertice A è:

<sup>3</sup>La dipendenza delle grandezze dal tempo  $t$  è omessa per facilitare la leggibilità delle equazioni.

$$\begin{aligned}
 & -k_C (d - h_1 \sin \vartheta - u_1) \frac{\left( \sqrt{d^2 - 2(d-u_1)h_1 \sin \vartheta - 2du_1 - 2h_1^2 \cos \vartheta + 2h_1^2 + u_1^2 - d} \right)}{\sqrt{d^2 - 2(d-u_1)h_1 \sin \vartheta - 2du_1 - 2h_1^2 \cos \vartheta + 2h_1^2 + u_1^2}} \\
 & + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & J_A \ddot{\vartheta} + \cos \vartheta (bgM - h_b M \ddot{x}_g) - M \sin \vartheta (b \ddot{x}_g + g h_b) + \\
 & k_C h_1 ((u_1 - d) \cos \vartheta + h_1 \sin \vartheta) \frac{\left( \sqrt{d^2 - 2(d-u_1)h_1 \sin \vartheta - 2du_1 - 2h_1^2 \cos \vartheta + 2h_1^2 + u_1^2 - d} \right)}{\sqrt{d^2 - 2(d-u_1)h_1 \sin \vartheta - 2du_1 - 2h_1^2 \cos \vartheta + 2h_1^2 + u_1^2}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

dove  $J_A$  è l'inerzia polare del blocco intorno al punto A.

Le equazioni del moto intorno al vertice B sono:

$$\begin{aligned}
 & k_C (-2b - d + 2b \cos \vartheta + h_1 \sin \vartheta + u_1) \frac{(\sqrt{Terms_1} - d)}{\sqrt{Terms_1}} \\
 & + (c_1 + c_2) \dot{u}_1 - c_2 \dot{u}_2 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 + m_1 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_1) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2 (u_2 - u_1) + m_2 (\ddot{x}_g + \ddot{u}_2) = 0 \\
 & \text{-----} \\
 & J_B \ddot{\vartheta} - \cos \vartheta (bgM + h_b M \ddot{x}_g) + M \sin \vartheta (b \ddot{x}_g - g h_b) + \\
 & k_C (h_1 (u_1 - d) \cos \vartheta + (h_1^2 + 2b(2b + d - u_1)) \sin \vartheta) \frac{(\sqrt{Terms_1} - d)}{\sqrt{Terms_1}} = 0
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

dove

$$\begin{aligned}
 Terms_1 = & 8b^2 - 4b(2b + d) \cos(\vartheta(t)) + u_1(t) (4b \cos(\vartheta(t)) - 4b - 2d + u_1(t)) + \\
 & 4bd + d^2 + 2h_1 (u_1(t) - d) \sin(\vartheta(t)) - 2h_1^2 (\cos(\vartheta(t)) - 1)
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

La condizione di uplift rispetto al vertice A è

$$\ddot{x}_g = \frac{g}{\lambda} + \frac{k_C u_1(t) h_1}{M h_b} \tag{3.54}$$

dove  $\lambda = h_b/b$  è la snellezza del blocco, mentre la condizione di uplift rispetto al vertice B è

$$\ddot{x}_g = -\frac{g}{\lambda} + \frac{k_C u_1(t) h_1}{M h_b} \tag{3.55}$$

Le condizioni di impatto sono le stesse già descritte in 3.2.0.1. Il setup sperimentale è organizzato in modo tale che il blocco si comporti perfettamente come un blocco rigido. Alcuni test preliminari hanno confermato che il coefficiente di restituzione del blocco è molto vicino a quello analitico. Nello specifico, il coefficiente di restituzione sperimentale è stato ot-

tenuto da alcune prove in moto di "free-rocking", svolte sul blocco isolato imponendo un'inclinazione iniziale differente del blocco. Il coefficiente di restituzione sperimentale è stato valutato dalle storie-temporali registrate di tale angolo. Il valore medio del rapporto tra il coefficiente di restituzione sperimentale e quello analitico è  $r_{ex}/r_{th} = 0.992$ . Alcuni test sperimentali che confermano la vicinanza tra il coefficiente di restituzione sperimentale e quello analitico possono essere trovati in [42, 52].

### **3.7.2 Setup sperimentale**

L'analisi sperimentale è stata svolta presso il laboratorio di Modelli sperimentali analitici e numerici per l'ingegneria civile (ANEMCE), il quale è una sezione del laboratorio di dinamica del Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile-Architettura e Ambientale (DICEAA) dell'università degli studi di l'Aquila. Il setup sperimentale è mostrato in Fig. 3.35. In particolare esso consiste di un telaio a due piani e un blocco rigido in alluminio, supportato da una base mobile guidata da uno shaker elettromagnetico a lunga corsa (Fig. 3.35a). Lo shaker è un simulatore sismico elettromagnetico (EMSS) capace di testare campioni in scala. Il blocco rigido è poggiato su una base regolabile (Fig. 3.35b) che scorre lungo due guide ancorate alla base del telaio. La base mobile è dotata di profili a spigoli vivi che consentono al blocco di oscillare senza scorrere, così da evitare problemi di micro-scorrimento del blocco come descritti in [89]. La molla di accoppiamento è inserita in un'asta sottile dotata di un gancio su di un lato per evitare l'instabilità della molla a compressione; il terminale uncinato è bloccato con un gancio sul primo piano del telaio mentre, dall'altro lato, l'asta è libera di scorrere all'interno del foro, realizzato nel centro di massa del blocco (Fig. 3.35c). La forza di attrito dell'asta è resa trascurabile usando lubrificanti e quindi essa non è considerata nel modello analitico. La molla è fissata sia al gancio che al blocco rigido (Fig. 3.35d). Lo shaker elettrodinamico è guidato da un'unità di controllo (amplificatore) e da CompactRIO, un controllo industriale incorporato prodotto da National Instruments (NI). Il CompactRIO è programmato in LabView per svolgere sia analisi armoniche che riproduzione di registrazioni sismiche. Due sensori laser ad alta risoluzione (Micro-Epsilon optoNCDT 1420) sono utilizzati come dispositivi senza contatto per tracciare gli spostamenti dei due piani. Le misurazioni, osservate con un oscilloscopio e un analizzatore di spettro, sono state acquisite da una tavola di acquisizione NI, che fornisce una frequenza di campionamento fino a 20000 campioni/s e risoluzione 14

bit. Una unità di filtro è implementata per tagliare le alte frequenze indotte dal rumore generale. La risposta registrata è post-processata attraverso i software Matlab® e Mathematica®.



(a)



(b)



(c)



(d)

**Fig. 3.36:** Dettagli del setup in prova: (a) Visione d'insieme del setup sperimentale; (b) base regolabile che scorre su due guide ancorate alla base del telaio; (c) connessione tra blocco e molla di accoppiamento; (d) connessione tra il primo piano del telaio e il blocco rigido.

Le caratteristiche geometriche del modello sono mostrate in Tab. 3.4 e Tab. 3.5, laddove le caratteristiche meccaniche sono riportate in Tab. 3.6.

In Tab. 3.6,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  sono i rapporti di smorzamento del telaio shear-type a 2 GDL. Tutte le quantità in Tab. 3.6 sono misurate direttamente ( $m_1$  e  $m_2$ )

Storeys	$h_1(m)$	$h_2(m)$
2	0.2	0.496

**Tabella 3.4:** Caratteristiche geometriche del telaio.

$2b(m)$	$2h_b(m)$	$s(m)$
0.05	0.4	0.10

**Tabella 3.5:** Caratteristiche geometriche del blocco.

o identificate attraverso il moto libero del telaio non accoppiato ( $k_1, k_2, \xi_1$  and  $\xi_2$ ). Le caratteristiche meccaniche del telaio sono state scelte per avere una struttura altamente deformabile. Questo facilita l'osservazione del moto durante i test sperimentali e la sua misurazione. Nello specifico, le frequenze di oscillazione dei due modi del telaio isolato sono:  $f_1 \cong 1.0\text{Hz}$  e  $f_2 \cong 2.5\text{Hz}$  così confermando l'alta deformabilità del sistema. Come visto nelle sezioni precedenti, le caratteristiche spettrali del sistema accoppiato linearizzato, confrontate con quelle del sistema non accoppiato, sono il fattore principale che influenza l'efficacia dell'accoppiamento. I risultati sono esposti in termini di coefficienti di guadagno, come mostrato nelle sezioni precedenti.

### 3.7.3 Analisi armonica

L'eccitazione armonica usata nelle analisi è  $\ddot{x}_g(t) = A_s \sin(\Omega t), 0 \leq t \leq t_{\max}$ , dove  $A_s$  è l'ampiezza dell'eccitazione armonica e  $t_{\max}$  è il massimo tempo utilizzato nelle integrazioni numeriche ( $t_{\max} = 120\text{s}$ ). Il valore elevato di  $t_{\max}$  è necessario per raggiungere le condizioni stazionarie. Il confronto tra risultati numerici e sperimentali è quindi svolto in condizioni stazionarie dopo che la dinamica transitoria è scomparsa. I parametri considerati nelle analisi sono la frequenza circolare dell'eccitazione armonica  $\Omega$  e il rapporto di smorzamento  $\beta = k_c/k_1$ . Poiché il sistema meccanico non è lineare, il suo comportamento dipende dall'ampiezza dell'eccitazione  $A_s$ . Nelle analisi si considera un valore fisso dell'ampiezza pari a:

$$A_s = 1.01g/\lambda \quad (3.56)$$

il quale è leggermente maggiore del valore di uplift del blocco isolato. Poiché durante il moto l'angolo di rocking  $\theta$  è sempre molto piccolo, il comportamento del sistema è quasi lineare. Si osserva che, per ampiezze dell'eccitazione maggiori di quella scelta (fino ad un certo valore) la

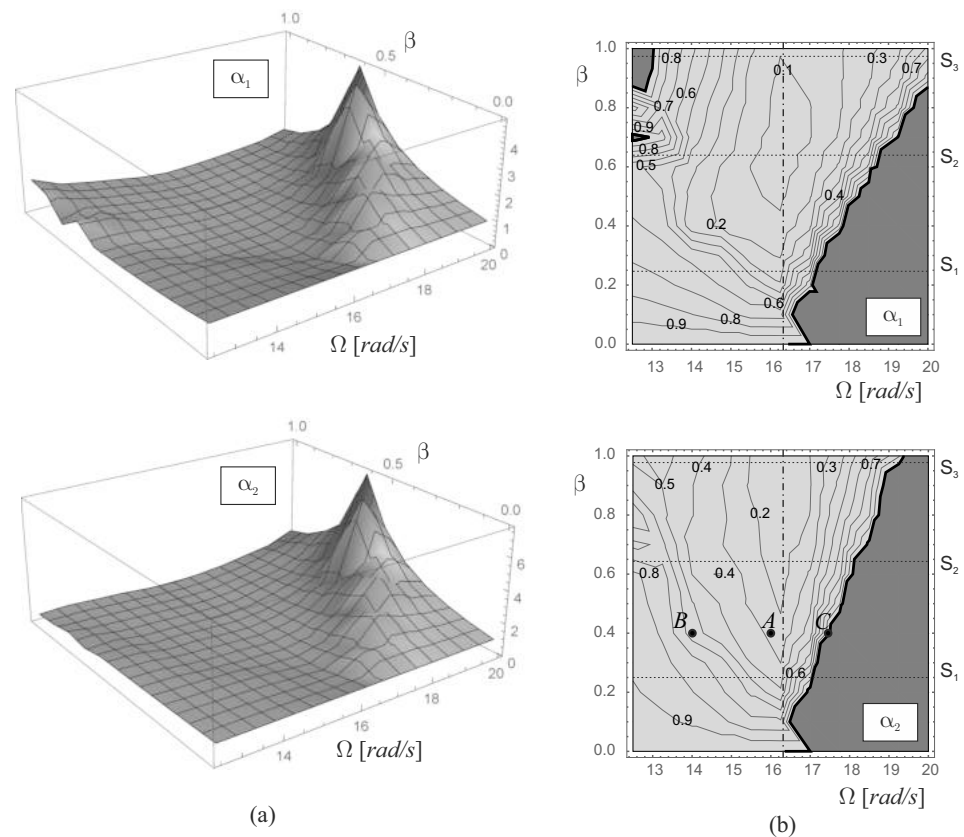
### ACCOPIAMENTO TRA TELAIO E ROCKING WALL

$k_1$ (N/m)	$k_2$ (N/m)	$m_1$ (kg)	$m_2$ (kg)	$\zeta_1$	$\zeta_2$
213.44	56.45	1.062	1.062	0.010	0.035

**Tabella 3.6:** Caratteristiche meccaniche del telaio 2 GDL.

risposta del sistema è quasi proporzionale all'ampiezza dell'eccitazione. Pertanto, l'ampiezza dell'eccitazione non gioca un ruolo fondamentale all'interno dell'intervallo di ampiezze investigate.

La Fig. 3.37a mostra le superfici riferite ai coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  nel piano dei parametri  $\Omega - \beta$  mentre la Fig. 3.37b mostra le mappe di guadagno, che sono proiezioni delle superfici su di un piano. Similmente alle sezioni precedenti, le sezioni grigio chiaro rappresentano le zone dove i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità e le zone grigio scuro sono maggiori dell'unità.



**Fig. 3.37:** (a) Superfici di guadagno analitiche di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ ; (b) Mappe di guadagno di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Gli spettri di guadagno forniscono i coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  in funzione della frequenza dell'eccitazione armonica. Essi possono essere formalmente visti come sezioni della Fig. 3.37b ottenute assegnando un valore costante a  $\beta$ . Pertanto il confronto si effettuerà confrontando gli spettri sperimentali con le opportune sezioni di Fig. 3.37b.

Sono state svolte tre prove sperimentali, considerando tre differenti valori di  $k_C$  (in altre parole tre valori di  $\beta$ ) in modo da ottenere tre spettri di guadagno. I risultati sperimentali sono comparati con le tre corrispondenti sezioni delle mappe indicate con S1, S2 e S3 in Fig. 3.37b. Per ottenere gli spettri di guadagno sperimentali, quattro differenti valori di frequenza sono considerati per ogni valore della rigidità di accoppiamento; nello specifico si considerano  $\Omega = 12.5, 15.0, 17.5$  e  $20.0$  rad/s. Durante le prove sono acquisite le storie temporali di  $u_1$  e  $u_2$ . Attraverso questi dati, vengono ricavati i coefficienti di guadagno in riferimento alle condizioni stazionarie del sistema.

La Fig. 3.38 mostra i tre spettri di guadagno, ognuno riferito ad un differente valore del rapporto di rigidità  $\beta$ . Inoltre ogni grafico riporta due curve: la linea continua rappresenta lo spettro di guadagno fornito dal modello analitico mentre la linea tratteggiata rappresenta lo spettro di guadagno ottenuto dall'analisi sperimentale. Le curve analitiche sono le sezioni delle mappe in Fig. 3.37 per i seguenti valori di  $\beta$ : S1 è riferita a  $\beta = 0.25$ , S2 è riferita a  $\beta = 0.64$  e S3 è ottenuta per  $\beta = 0.97$ .

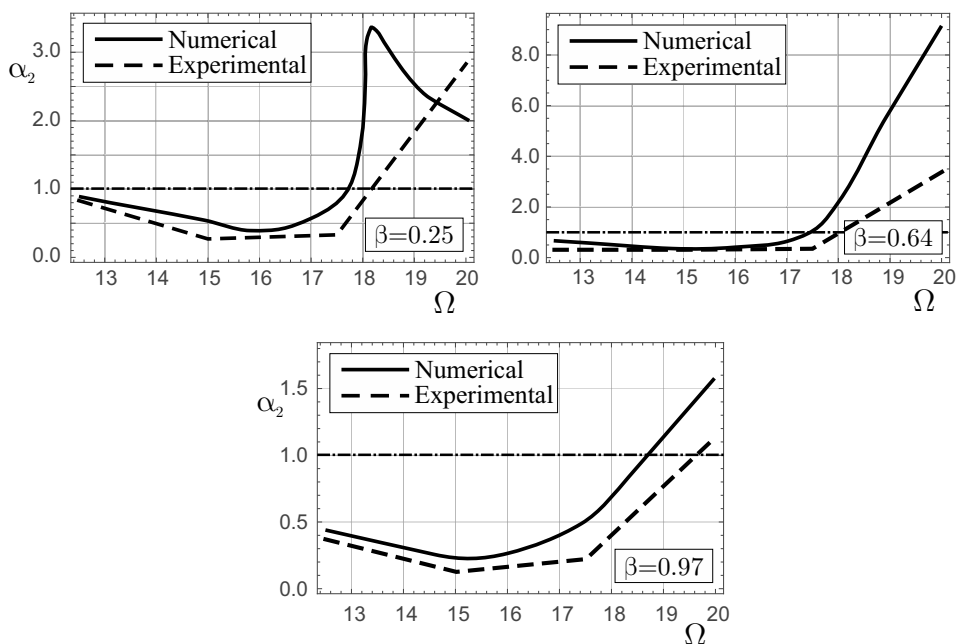


Fig. 3.38: (a) Spettri di guadagno di  $\alpha_2$  analitici e sperimentali.

Le regioni di guadagno in ogni spettro (ovvero le regioni dove il coefficiente  $\alpha_2$  è inferiore all'unità) sono ben descritte dai risultati numerici, poiché loro sono sufficientemente vicine alle curve sperimentali. Comunque, fuori da queste regioni, i risultati analitici mostrano una crescita più rapida di quelli sperimentali. In particolare, lo spettro numerico ottenuto per  $\beta = 0.25$  (grafico in alto a sinistra) ha in massimo in  $\Omega \cong 18.0$ . Al contrario,

lo spettro sperimentale non mostra un massimo all'interno dell'intervallo di frequenze analizzate. Tale massimo è rappresentativo di una risonanza con il secondo modo accoppiato. In generale, la crescita che le curve sperimentali mostrano fuori dalla regione di guadagno è inferiore a quelle analitiche. Questo fatto è collegato alle differenze tra le frequenze proprie del modello sperimentale e quelle del secondo modo linearizzato del modello analitico, dovute principalmente a imperfezioni del sistema. Tali imperfezioni possono essere identificate nel piccolo difetto di planarità della base su cui poggia il blocco e la non perfetta simmetria del blocco.

### 3.7.4 Analisi sismica

Per verificare la validità del modello analitico sono state selezionate eccitazioni più complesse. In particolare sono state considerate sette diverse registrazioni sismiche, la cui lista completa è riportata sotto:

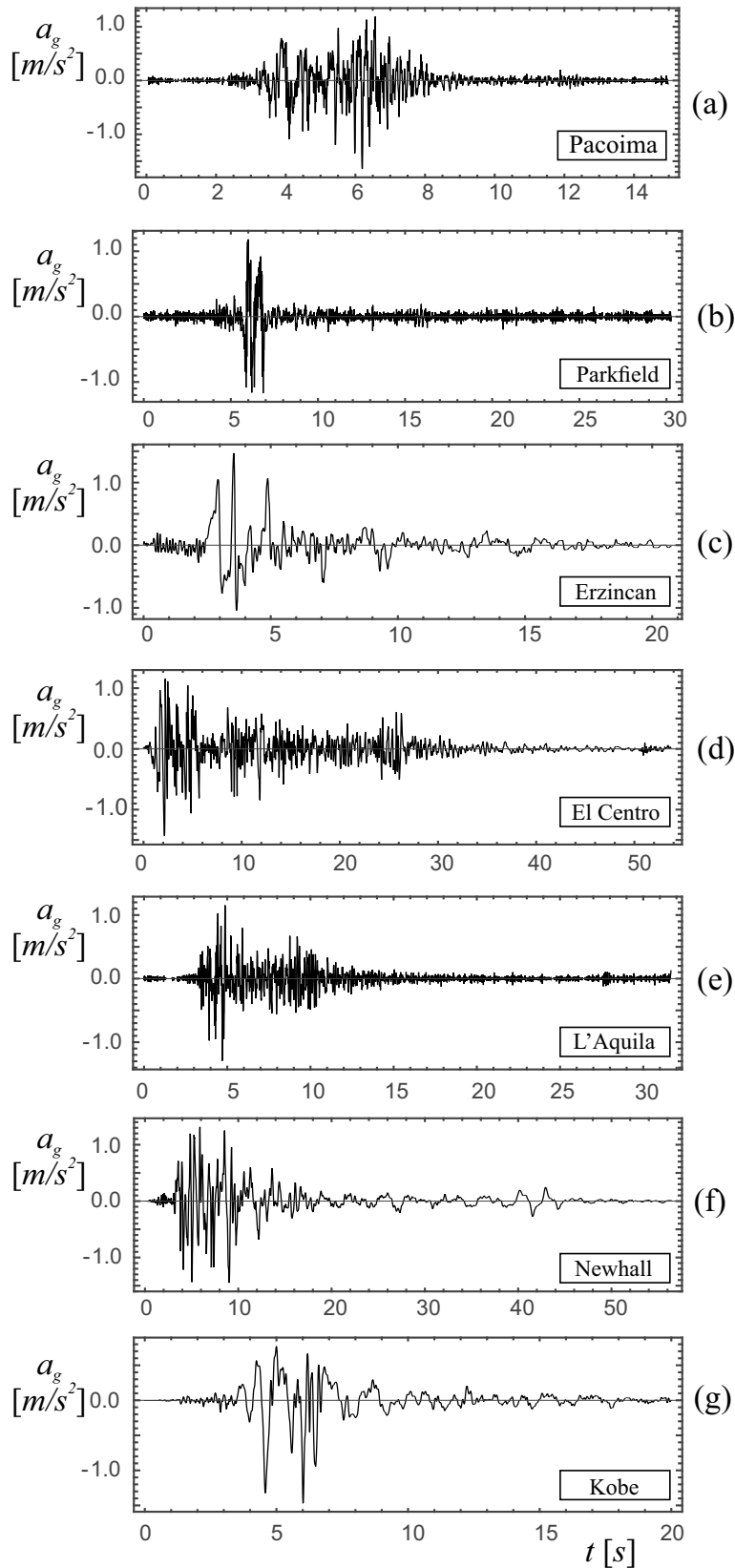
- (a) Pacoima, Dam-164 ground motion recorded during the 1971 San Fernando, California earthquake;
- (b) Parkfield, CO2-065 ground motion recorded during the California earthquake 1966;
- (c) Erzincan, NS ground motion recorded during the 1992 Turkey earthquake;
- (d) El Centro, CA - Array Sta 9 - Imperial Valley Irrigation District - 302 Commercial (component 180), 1979;
- (e) L'Aquila, IT.AQV.HNE.D.20090406.013240.X.ACC station, ground motion recorded during the 2009 Italian earthquake;
- (f) Newhall, Newhall-360 station, ground motion recorded during the 1994 Northridge, California earthquake;
- (g) Kobe, Takarazuka-000 station, ground motion recorded during the 1995 Japan earthquake.

Queste registrazioni sono state scelte in modo da essere sufficientemente diverse l'una dall'altra. Le storie temporali, mostrate in Fig. 3.39, sono state opportunamente scalate per avere la massima  $PGA^4$  il 20% più alta dell'accelerazione di uplift del blocco isolato.

Le curve di guadagno forniscono il valore di  $\alpha_2$  in funzione di  $\beta$ . Le curve sperimentali sono derivate considerando tre differenti valori di  $\beta^5$  per ogni

<sup>4</sup>Peak Ground Acceleration.

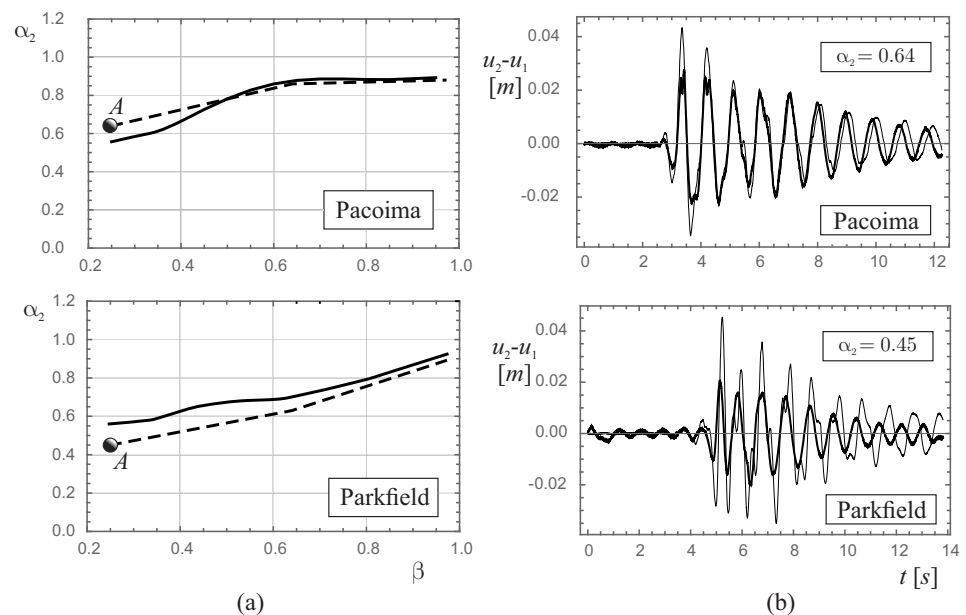
<sup>5</sup>Sono considerati gli stessi valori usati nell'analisi armonica, ovvero  $\beta = 0.25$ ,  $\beta = 0.64$  e  $\beta = 0.97$ .



**Fig. 3.39:** Storie temporali delle registrazioni analizzate (a) Pacoima; (b) Parkfield; (c) Erzincan; (d); (e) El Centro; (f) L'Aquila; (g) Kobe.

registrazione sismica. Le prove sperimentali sono state effettuate selezionando tre valori  $\beta$  e di conseguenza le curve di guadagno sperimentali sono ottenute per interpolazione di questi punti. Poi, le curve sperimentali sono confrontate con quelle analitiche. Il confronto avviene sempre tramite i coefficienti di guadagno, siano essi ottenuti dal modello analitico e da quello sperimentale. Il confronto tra di essi è effettuato considerando le registrazioni sismiche di Pacoima e Parkfield. La Fig. 3.40a riporta le curve di guadagno analitiche e sperimentali mentre la Fig. 3.40b riporta le storie temporali sperimentali del drift della sovrastruttura per il telaio accoppiato e quello non accoppiato. Si osserva una buona corrispondenza tra le curve analitiche e quelle sismiche, confermando l'abilità predittiva del modello analitico. Inoltre la comparazione tra le storie temporali del drift del sistema accoppiato e quello non accoppiato (Fig. 3.40b), ottenute per  $\beta = 0.25$ , mostra la capacità del sistema accoppiato di ridurre gli spostamenti del telaio.

In conclusione, il confronto tra risultati numerici e sperimentali valida la capacità predittiva del modello analitico. Inoltre, per verificare la capacità del sistema a ridurre gli spostamenti anche in differenti condizioni, la Fig. 3.41 riporta le storie temporali analitiche degli spostamenti della sovrastruttura nel telaio accoppiato e in quello non accoppiato per le altre cinque registrazioni sismiche.



**Fig. 3.40:** Curve di guadagno: (a) curve sperimentali (linea tratteggiata) e analitiche (linea continua) per le registrazioni di Pacoima (in alto) e Parkfield (in basso); (b) Storie temporali sperimentali del drift della sovrastruttura del telaio non accoppiato (linea sottile) e accoppiato (linea spessa) relative al punto A ( $\beta = 0.25$ ).

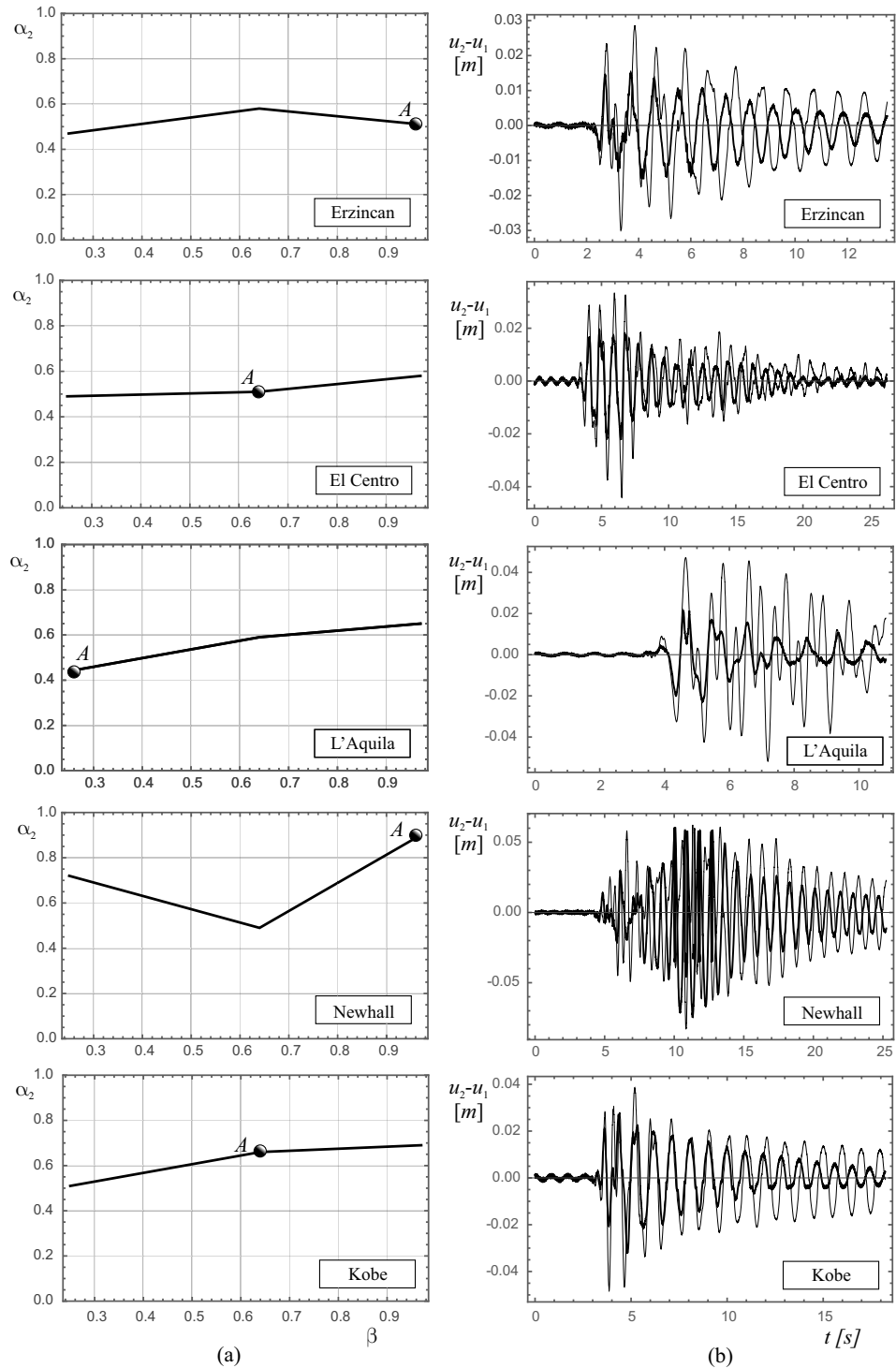
Si osserva che in tutti i casi di Fig. 3.41a il coefficiente  $\alpha_2$  è minore dell'unità, tuttavia la posizione di minimo cambia al variare di  $\beta$ ; ne consegue che la scelta delle caratteristiche del dispositivo di accoppiamento è un aspetto fondamentale per ottenere la massima prestazione dal sistema. Il confronto delle storie temporali di Fig. 3.41b conferma i vantaggi dell'accoppiamento.

### 3.8 Conclusioni

In questo capitolo si è indagata la possibilità di mitigare le vibrazioni di una struttura intelaiata attraverso l'accoppiamento con un blocco rigido. La struttura viene accoppiata al blocco attraverso un organo visco-elastico (CD). Inoltre può anche essere presente un collegamento visco-elastico tra il blocco e il terreno (ED). Nella prima parte si è indagato il comportamento qualitativo del sistema, mettendo in luce due differenti comportamenti a seconda della presenza o meno di ED. In particolare, qualora solo CD sia presente, la riduzione delle vibrazioni si verifica poiché il blocco si muove in contro-fase rispetto alla struttura. In particolare:

- l'efficienza dell'accoppiamento tra blocco e telaio è più elevata quando il blocco ha una base sufficientemente alta.
- Un valore più elevato della base  $2b$  richiede una rigidezza maggiore del dispositivo di accoppiamento; comunque il rapporto di rigidezza  $\beta$  che assicura una buona risposta del sistema accoppiato resta sempre comunque sufficientemente piccolo ( $\beta < 0.09$ );
- Dalle precedenti analisi si deduce che l'accoppiamento funziona bene quando la frequenza dell'eccitazione armonica è prossima a quella del modo di vibrazione in cui il blocco e il piano del telaio ad esso connesso si muovono in contro-fase, così assicurando un funzionamento simile al "Tuned Mass Damper" per la parete. Poiché la frequenza di tale modo è in generale più alta del primo modo del telaio non accoppiato, la presenza del blocco assicura effetti migliorativi per frequenze dell'eccitazione armonica più elevate delle frequenze del telaio non accoppiato.

Qualora sia presente anche il dispositivo esterno di collegamento tra blocco e telaio si ha che:



**Fig. 3.41:** (a) curve sperimentali di cinque differenti registrazioni sismiche; (b) Storie temporali sperimentali del drift della sovrastruttura del telaio non accoppiato (linea sottile) e accoppiato (linea spessa) relative al punto A, indicato nelle rispettive curve.

- Per tutte le lunghezze della base  $2b$  considerate, sono necessari valori molto alti delle rigidzze  $k_C$  e  $k_E$  per assicurare buone prestazioni al sistema accoppiato;

- Dalle analisi precedenti si deduce che l'accoppiamento funziona bene quando la frequenza dell'eccitazione armonica è prossima o più piccola della prima frequenza del telaio non accoppiato; contrariamente al caso precedente, qui l'accoppiamento assicura effetti migliorativi per valori dell'eccitazione armonica più piccoli di quelli della prima frequenza del telaio disaccoppiato.

Si è visto che, sebbene entrambi i funzionamenti portino benefici in termini di mitigazione delle vibrazioni, le prestazioni del sistema senza ED sono più idonee alla protezione sismica degli edifici dato l'intervallo di frequenze interessate. Si è quindi verificata la capacità del sistema nel mitigare azioni di tipo sismico. Si è visto che, in maniera simile al TMD, il rapporto di massa tra la massa del blocco e quella della struttura non può essere troppo basso. Pertanto, al fine di aumentare la massa senza incrementare in maniera eccessiva le dimensioni del blocco, si è aggiunta una massa concentrata sulla testa del blocco. In generale si è riscontrato un allargamento delle zone di guadagno e una diminuzione dei coefficienti di guadagno. La massa aggiunta infatti incrementa il periodo del primo modo accoppiato. Nel primo modo il blocco e il telaio si muovono in fase. Aggiungendo massa, tale periodo si sposta dalle frequenze di interesse del terremoto e il modo più eccitato è quello dove blocco e telaio si muovono contro-fase. Questo si verifica solo se lo shift della frequenza dovuto alla massa esterna allontana il primo modo dallo spettro del terremoto. Per ridurre le dimensioni del blocco e migliorare le performance del sistema accoppiato, sono stati aggiunti due inerter in due posizioni differenti. Un inerter è applicato direttamente sulla sottostruttura ( $ID_S$ ) mentre altri due sono applicati alla base del blocco ( $ID_B$ ). Si è visto che  $ID_S$  risulta sempre dannoso per le performance dell'accoppiamento. Al contrario  $ID_B$  consente di migliorare notevolmente le prestazioni dell'accoppiamento e al tempo stesso mantenere le dimensioni del blocco ridotte. Questo si verifica perché  $ID_B$  consente, attraverso la sua massa apparente, di fornire ulteriore inerzia al blocco. L'analisi delle storie temporali e delle frequenze e dei modi propri del sistema accoppiato conferma il funzionamento del blocco come una sorta di Tuned Mass Damper nei punti dove l'efficienza dell'accoppiamento è massima. Tuttavia, sebbene molto utili alla comprensione del comportamento meccanico del sistema, le analisi svolte su singole registrazioni sismiche hanno un limitato interesse applicativo. Poiché le non-linearità del sistema sono molto piccole in quanto le oscillazioni del blocco sono ridotte, è stato possibile svolgere un'analisi dinamica

con spettro di progetto sfruttando le proprietà di spettro-compatibilità. La spettro-compatibilità del sistema è stata verificata confrontando due diversi set di registrazioni compatibili con lo stesso spettro di progetto. Le mappe ottenute sono pressoché identiche, e la loro differenza è inferiore alla tolleranza imposta dalla spettro-compatibilità (in altre parole, le differenze sono dovute alle piccole differenze tra gli spettri medi e lo spettro di progetto, la cui differenza massima ammessa è fornita dalla normativa tecnica). Questo ha permesso di creare mappe di guadagno medie riferite ad uno spettro di progetto utili al predimensionamento del sistema accoppiato. Infine, si è effettuata una validazione sperimentale del modello analitico. Tale validazione è stata eseguita sia con analisi armoniche che analisi sismiche sul sistema analitico e sperimentale. I risultati delle analisi armoniche mostrano una buona corrispondenza tra modello sperimentale e analitico all'interno delle regioni di guadagno. All'esterno di tali regioni si osserva una differenza tra il periodo del secondo modo linearizzato e quello del sistema sperimentale. Ciò è imputabile ad alcune imperfezioni del sistema, quali la non perfetta planarità della base su cui poggia il blocco e la non perfetta simmetria del blocco stesso. Tuttavia tale differenza influenza solamente i risultati all'esterno delle zone di guadagno. Questo comportamento è verificato dalle analisi sismiche. Infatti in queste analisi, svolte su due diverse registrazioni, il sistema accoppiato agisce sempre all'interno delle zone di guadagno e pertanto si ha un buon riscontro tra le curve sismiche analitiche e quelle sperimentali. Infine i risultati analitici ottenuti per altre registrazioni sismiche hanno mostrato la capacità del blocco di mitigare gli spostamenti del telaio anche per differenti tipi di eccitazione esterna.

# MIGLIORAMENTO DINAMICO DI STRUTTURE INTELAIATE ATTRAVERSO L'ACCOPPIAMENTO CON UN ESOSCHELETRO

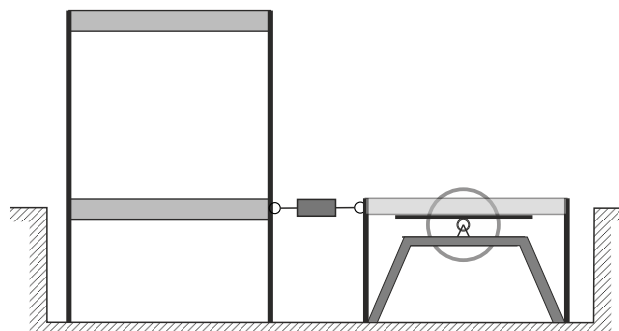
---

## Abstract

In this chapter, the use of exoskeletons to improve the dynamic behaviour of frame structures is investigated. The exoskeletons are widely known and used in civil engineering. However, differently from the traditional approach, the exoskeleton studied in this chapter is connected only to the lower part of the structure, thus reducing both cost and aesthetic impact of the protection strategy. The study is organized in two parts:

- The frame structure is modeled by means of a 2-DOF archetype model and the first storey of the frame is rigidly connected to an elastoplastic exoskeletons.
- A visco elastic device connect the first storey of a frame structure and the exoskeleton. The coupling device consist of a Maxwell device or a Kelvin-Voight device. The use of inerter devices applied to the exoskeleton is considered.

The results of the parametric analysis are organized in gain maps that represent a tool to the comprehension of the mechanical behavior of the system and to the preliminary design of the protection strategy.





# MIGLIORAMENTO DINAMICO DI STRUTTURE INTELAIATE ATTRAVERSO L'ACCOPPIAMENTO CON UN ESOSCHELETRO

---

## Sommario

Questo capitolo tratta l'utilizzo di esoscheletri nel miglioramento dinamico di strutture intelaiate. Gli esoscheletri sono ampiamente conosciuti ed utilizzati nell'ingegneria civile. Tuttavia, in maniera differente dall'approccio tradizionale, l'esoscheletro descritto non è connesso a tutta la struttura, ma solo ad una sua parte. In questa maniera si vuole ridurre non solo il costo dell'intervento ma anche il suo impatto estetico. Lo studio è articolato in due parti:

- La struttura a telaio, modellata attraverso un modello equivalente archetipo a due gradi di libertà, è collegata rigidamente, a livello del primo piano, ad un esoscheletro elasto-plastico;
- L'accoppiamento viene realizzato attraverso un dispositivo elastico e vengono studiati due differenti tipi di accoppiamento tra struttura ed esoscheletro, ovvero l'accoppiamento può essere realizzato con un dispositivo di Maxwell oppure con un dispositivo di Kelvin-Voight. Viene anche considerato l'utilizzo di dispositivi inerter.

I risultati delle analisi parametriche sono organizzati in mappe di guadagno che rappresentano uno strumento sia per la comprensione del comportamento dinamico del sistema sia per un predimensionamento della strategia di protezione.

Un metodo comune di protezione consiste nell'accoppiare il telaio con una struttura esterna chiamata esoscheletro. Come suggerisce il nome, l'esoscheletro è una struttura esterna, più o meno rigida, che ha il compito di proteggere la struttura interna. Il concetto di esoscheletro è molto comune in natura, ed è utilizzato in molti settori dell'ingegneria, spaziando dall'ingegneria meccanica all'ingegneria biomedica fino all'ingegneria civile. L'accoppiamento di esoscheletri con strutture esistenti è un metodo ampiamente utilizzato nella comune pratica professionale. Tuttavia in tale caso gli esoscheletri sono disposti come una "gabbia" attorno al telaio, ricoprendolo totalmente. Lo scopo dell'esoscheletro è quello sia di sorreggere la struttura esistente sia di farsi carico dell'aliquota maggiore delle forze orizzontali durante l'azione sismica tramite l'inserimento di collegamenti puntuali (rigidi o a molla dissipativa). Questa tecnica presenta tuttavia un notevole impatto estetico. Al contrario, in questa tesi si propone un modello di esoscheletro connesso solamente ad una porzione di struttura. Il miglioramento che ne deriva sarà pertanto di tipo dinamico, indirizzato a migliorare la risposta dinamica del telaio modificandone le proprietà dinamiche. Inoltre, se l'edificio presenta un piano sottoterra, allora l'impatto estetico causato dall'accoppiamento con l'esoscheletro risulta trascurabile.

## 4.1 Lo schema meccanico

Lo schema meccanico dell'accoppiamento è rappresentato in Fig. 4.1. La struttura è connessa all'esoscheletro a livello del primo piano. La porzione di struttura sotto il livello dell'accoppiamento è denominata sottostruttura mentre la porzione al di sopra è denominata sovrastruttura. Lo scopo delle analisi è di determinare se l'utilizzo di questo esoscheletro consente di ridurre gli spostamenti sia della sottostruttura che della sovrastruttura.

Indipendentemente dal numero dei piani, il telaio è modellato attraverso un modello archetipo equivalente a 2-GDL mentre l'esoscheletro è rappresentato da un modello ad 1-GDL. Il dispositivo di accoppiamento viene modellato attraverso un collegamento rigido oppure deformabile secondo le leggi costitutive di Maxwell o Kelvin-Voight.

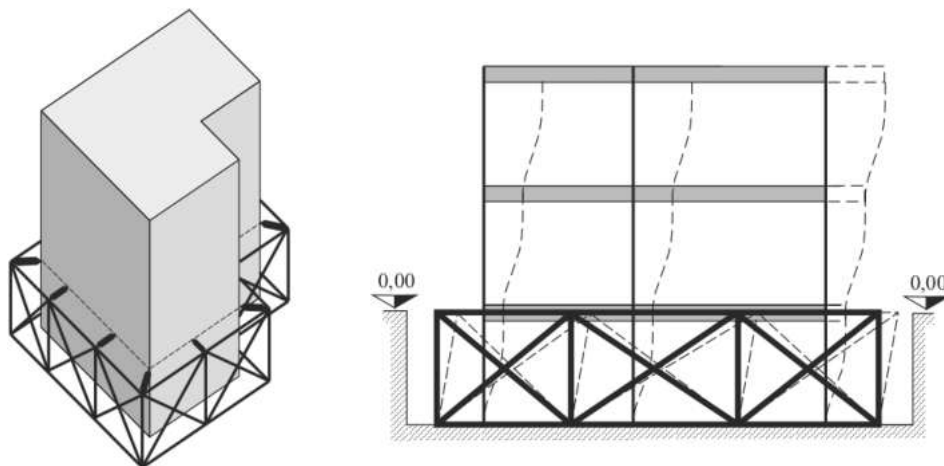


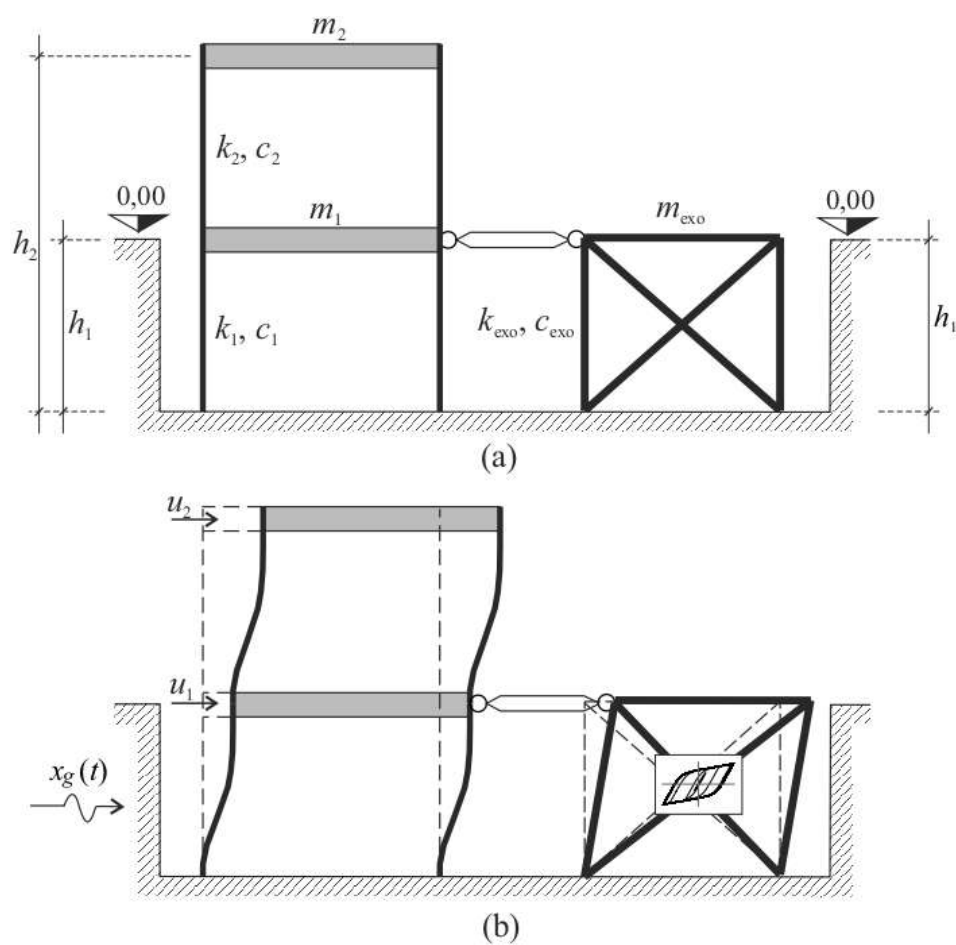
Fig. 4.1: Schema meccanico dell'accoppiamento tra telaio ed esoscheletro.

## 4.2 Accoppiamento rigido tra telaio ed esoscheletro elasto-plastico

### 4.2.1 Il sistema meccanico e le equazioni del moto

La struttura è modellata attraverso un modello archetipo equivalente a due gradi di libertà (Fig. 4.2a). Il primo grado di libertà,  $u_1$ , è associato alla sottostruttura mentre il secondo grado di libertà,  $u_2$  è associato alla sovrastruttura (Fig. 4.2b). La procedura per determinare le caratteristiche meccaniche del modello archetipo, partendo dal modello M-GDL, è riportata in Appendice A.1. In particolare, le masse  $m_1$  e  $m_2$  coincidono con le masse fisiche di sottostruttura e sovrastruttura, mentre le rigidezze  $k_1$  e  $k_2$  sono determinate con la procedura descritta. I due coefficienti di smorzamento  $c_1$  e  $c_2$  associati al telaio 2-GDL derivano dalla formulazione classica di Rayleigh, assumendo un rapporto di smorzamento  $\zeta = 0.05$  per entrambi i modi. L'esoscheletro è rappresentato da un modello elasto-plastico ad un grado di libertà. Poiché la connessione che collega l'esoscheletro alla sottostruttura è rigida, allora lo spostamento dell'esoscheletro è lo stesso della sottostruttura. Ne consegue che il modello accoppiato ha lo stesso numero di gradi di libertà del telaio non accoppiato. Le caratteristiche meccaniche del sistema elasto-plastico 1-GDL  $m_e$  e  $k_e$  sono le grandezze variabili nelle analisi. Nello specifico,  $k_e$  è la rigidezza elastica lineare mentre il coefficiente di smorzamento  $c_e$  è ottenuto trattando il sistema elasto-plastico come un sistema elastico 1-GDL isolato. In particolare,  $c_e = 2\zeta_e m_e \omega_e$ , dove  $\omega_e = \sqrt{k_e/m_e}$  ( $\zeta_e = 0.02$ ).

Le equazioni del moto sono ottenute con un approccio diretto impo-



**Fig. 4.2:** Schema meccanico: (a) caratteristiche geometriche e meccaniche; (b) configurazione deformata e parametri lagrangiani (direzioni di positività).

nendo l'equilibrio delle forze che agiscono su  $m_1$  e  $m_2$ :

$$\begin{aligned} (m_1 + m_e)\ddot{u}_1(t) + (c_1 + c_2 + c_e)\dot{u}_1(t) - c_2\dot{u}_2(t) + \\ (k_1 + k_2)u_1(t) - k_2u_2(t) + f_e(t) = -(m_1 + m_e)\ddot{x}_g(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$m_2\ddot{u}_2(t) - c_2\dot{u}_1(t) + c_2\dot{u}_2(t) - k_2u_1(t) + k_2u_2(t) = -m_2\ddot{x}_g(t)$$

dove  $\ddot{x}_g$  è l'eccitazione alla base e  $f_{e(t)}$  è la forza descritta dal legame costitutivo del sistema elasto-plastico.

Il legame costitutivo del sistema elasto-plastico è descritto dal modello di Bouc-Wen [75]. Secondo questo modello, la forza  $f_{e(t)}$  può essere espressa come

$$f_e(t) = \psi k_e u_1(t) + k_e u_y (1 - \psi) z_e(t) \quad (4.2)$$

dove  $\psi$  è il rapporto tra la rigidità post-snervamento  $k_{pl}$  e quella elastica  $k_e$  ovvero  $k_{pl} = \psi k_e$ . Se  $\psi = 0$ , allora il legame costitutivo è di tipo elastico-perfettamente plastico, mentre se  $\psi = 1$ , allora il legame costitutivo è elastico lineare. La quantità  $u_y$  rappresenta lo spostamento di snervamento, ovvero lo spostamento oltre il quale il sistema elasto-plastico subisce deformazioni permanenti. Si osserva inoltre che il prodotto  $k_e u_y$  rappresenta la forza di snervamento  $F_y$  della struttura. Infine,  $z_e$  è una variabile ausiliaria che descrive il comportamento dopo lo snervamento ed è definita da un'equazione differenziale ordinaria

$$\dot{z}_e(t) = \frac{1}{u_y} [A - |z_e(t)|^n (\beta_1 + \gamma_1 \text{sign}(\dot{u}_1(t) \cdot z_e(t)))] \dot{u}_1(t) \quad (4.3)$$

dove i parametri  $A$ ,  $\beta_1$  e  $\gamma_1$  dipendono dalla forma dei cicli di isteresi. La scelta dei parametri ridondanti di Bouc-Wen è già stata discussa in 2.5.1. Pertanto i parametri sono:  $\beta_1 = \gamma_1 = 1/2$ ,  $AA = 1$  e  $n = 2$ .

## 4.2.2 Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno

Nelle simulazioni sono analizzate due tipologie differenti di strutture, le cui caratteristiche sono riportate in Tab. 4.1.

Piani	Superficie	Massa di piano	Altezza interpiano	1° Periodo
3	100 m <sup>2</sup>	120.6 × 10 <sup>3</sup> kg	3 m	0.390 s
6	300 m <sup>2</sup>	361.8 × 10 <sup>3</sup> kg	3 m	0.655 s

**Tabella 4.1:** Caratteristiche geometriche e meccaniche dei due telai (M-GDL) di riferimento.

Piani	Conn.	$k_1$ [N/m]	$k_2$ [N/m]	$m_1$ [kg]	$m_2$ [kg]
3	1	$2.19219 \times 10^8$	$0.93951 \times 10^8$	$120.6 \times 10^3$	$241.2 \times 10^3$
6	1	$1.02972 \times 10^9$	$1.99300 \times 10^8$	$361.8 \times 10^3$	$1809.0 \times 10^3$
6	2	$9.30067 \times 10^8$	$1.99300 \times 10^8$	$723.6 \times 10^3$	$1447.2 \times 10^3$

**Tabella 4.2:** Caratteristiche meccaniche del modello equivalente 2-GDL.

Lo smorzamento proporzionale  $\zeta$  è pari al 5%. Si osserva che i valori di  $k_1$  e  $k_2$  cambiano al variare del piano di connessione con l'esoscheletro, anche se il modello equivalente 2-GDL si riferisce alla stessa struttura (vedere seconda e terza riga della Tab. 4.2). La procedura di equivalenza è riportata in Appendice A.1. Nella tabella,  $\zeta$  è il rapporto di smorzamento utilizzato per i due modi del modello archetipo rappresentativo del telaio non accoppiato. Il valore  $\zeta = 0.05$  è comunemente utilizzato in varie normative tecniche per strutture a telaio ed è pertanto il valore utilizzato in queste simulazioni. I parametri variabili usati nelle analisi sono i seguenti:

- Le caratteristiche meccaniche dei modelli archetipi 2-GDL  $m_i$  e  $k_i$  ( $i = 1, 2$ ) che rappresentano strutture a telaio a M-GDL.
- Rapporto di rigidezza pre- e post-snervamento

$$\psi = \frac{k_{pl}}{k_e} \quad (4.4)$$

- Rapporto tra la rigidezza elastica dell'esoscheletro e la rigidezza della sottostruttura

$$\mu = \frac{k_e}{k_1} \quad (4.5)$$

- Rapporto tra la forza di snervamento e il peso dell'esoscheletro ( $w_e$  (ottenuto moltiplicando la massa  $m_{ex}$  per l'accelerazione di gravità  $g$ )

$$\eta = \frac{F_y}{w_e} = \frac{k_e u_y}{m_e g} \quad (4.6)$$

- Rapporto tra la massa dell'esoscheletro e la massa della struttura

$$\gamma = \frac{m_e}{m_1 + m_2} \quad (4.7)$$

La comparazione tra lo spostamento  $u_1$  e il drift  $\Delta u = u_2 - u_1$  del sistema accoppiato e quelli della struttura non accoppiata forniscono un'indicazione dell'efficienza dell'accoppiamento. Pertanto si introducono due coefficienti di guadagno:

$$\alpha_1 = \frac{\max |u_1(t)|}{\max |\tilde{u}_1(t)|}, \quad \alpha_2 = \frac{\max |u_2(t) - u_1(t)|}{\max |\tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_1(t)|} = \frac{\max |\Delta u(t)|}{\max |\Delta \tilde{u}(t)|} \quad (4.8)$$

dove gli spostamenti  $\tilde{u}_1$  e  $\tilde{u}_2$  sono quelli del modello 2-GDL della struttura non accoppiata. Dall' Eq. (4.8) segue che minori sono i valori di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  rispetto all'unità, maggiore è l'efficacia dell'accoppiamento.

Lo scopo dell'analisi parametrica è valutare i coefficiente di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per ogni combinazione dei parametri variabili. I risultati sono poi organizzati in specifiche mappe, chiamate mappe di guadagno.

### 4.2.3 Il comportamento qualitativo del sistema accoppiato

Per capire quale sia il comportamento qualitativo del sistema e in particolare come esso reagisce a determinate frequenze, si eccita il sistema con una forzante armonica

$$\ddot{x}_g(t) = A_s \sin(\Omega t) \quad (4.9)$$

Nell' Eq. (4.9),  $\Omega = 2\pi/T_s$  è la frequenza circolare dell'eccitazione,  $T_s$  è il periodo dell'eccitazione armonica e  $A_s$  è la sua ampiezza.

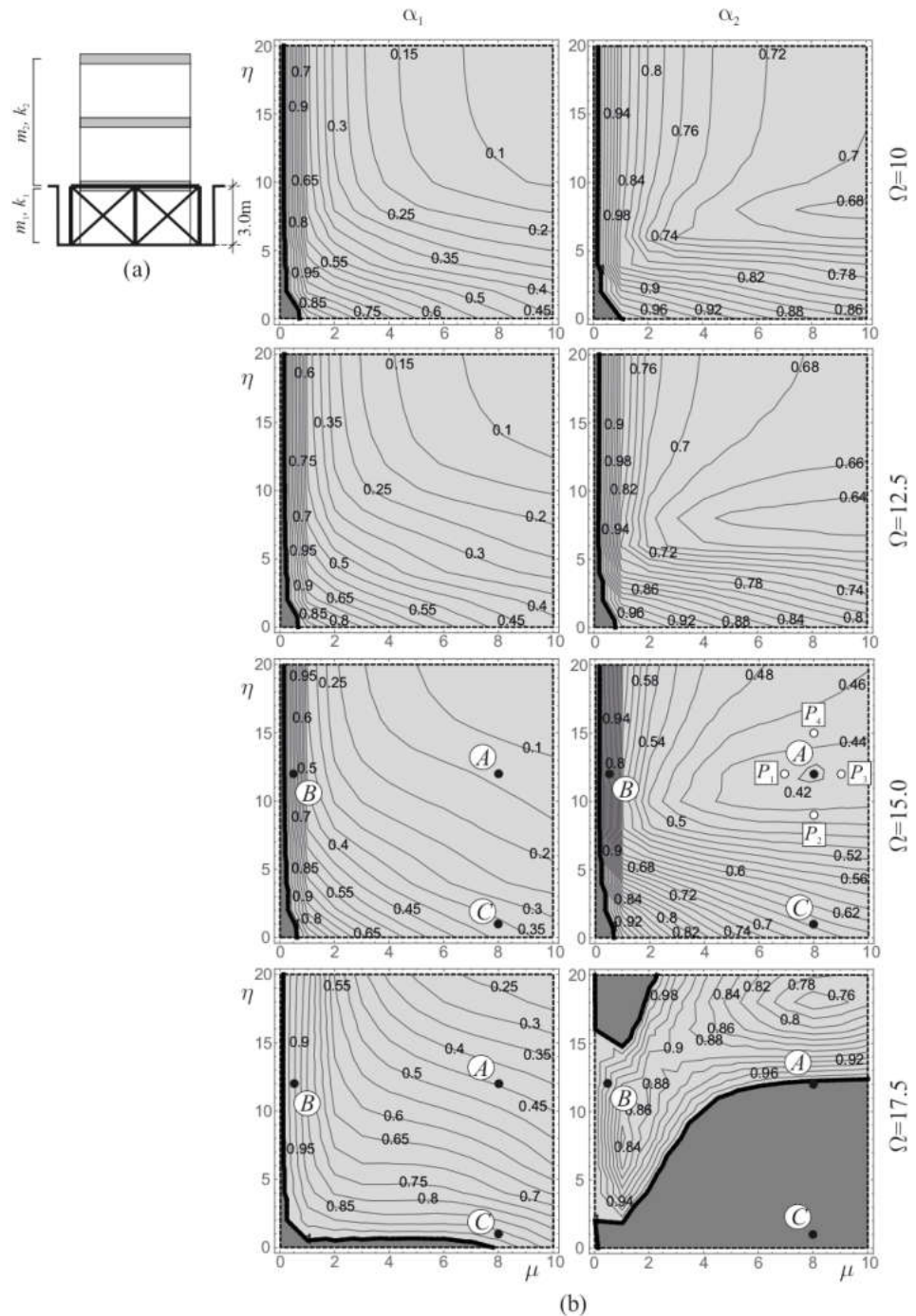
#### 4.2.3.1 Il ruolo della rigidità elastica e della forza di snervamento

Il ruolo di  $k_e$  e  $F_y$  nella risposta dinamica del sistema accoppiato è investigato rappresentando i coefficienti di guadagno nel piano dei parametri  $\mu - \eta$  (Eq. (4.5)-(4.6)). L'edificio analizzato è quello avente tre piani le cui caratteristiche sono riportate nella prima riga della Tab. 4.1 e Tab. 4.2

Come mostrato in Fig. 4.3a, l'esoscheletro è connesso al primo piano del telaio. Le mappe di guadagno in Fig. 4.3b rappresentano i coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  nel piano dei parametri  $\mu - \eta$ . Le regioni grigio chiaro sono chiamate regioni di guadagno e in esse i coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono inferiori all'unità, in altre parole sono le zone dove l'accoppiamento con l'esoscheletro è in grado di ridurre gli spostamenti della struttura. Le due mappe di ogni riga di Fig. 4.3b si riferiscono ai coefficienti  $\alpha_1$  (sulla sinistra) e  $\alpha_2$  (sulla destra), valutati per diversi valori di  $\Omega$ .

Le mappe nella prima colonna di Fig. 4.3b mostrano che l'accoppiamento con l'esoscheletro conduce ad una riduzione significativa di  $u_1$ . La zona chiara nelle mappe  $\alpha_1$  copre quasi completamente il piano dei parametri raggiungendo valori minimi inferiori a 0.1, ovvero una riduzione dello spostamento del 90% rispetto allo spostamento che si otterrebbe se lo stesso telaio non fosse accoppiato. Le mappe  $\alpha_2$  mostrano che la riduzione in  $\Delta u(t)$  è di gran lunga inferiore rispetto a quella ottenuta per  $\alpha_1$ . Sebbene i valori assoluti di  $\alpha_2$  siano più elevati di  $\alpha_1$ , essi restano comunque inferiori all'unità. In particolare, per valori di  $\Omega$  tra 10 e 15 rad/s, le regioni di guadagno coprono quasi interamente il piano dei parametri. Invece, nel caso

di  $\Omega = 17.5$  rad/s, la regione di guadagno si restringe e i valori di  $\alpha_2$  aumentano. Comunque, diversamente dalle mappe relative ad  $\alpha_1$ , nelle mappe di  $\alpha_2$  è possibile distinguere un minimo assoluto all'interno dell'intervallo dei parametri studiato. La posizione e il valore del minimo dipende da  $\Omega$ . Il valore più piccolo si verifica per  $\Omega = 15$  ed è pari a  $\alpha_2 = 0.42$ , quindi corrispondente ad una riduzione del drift della sovrastruttura del 58%.



**Fig. 4.3:** (a) Schema geometrico dell'accoppiamento; (b) Mappe di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per differenti valori della frequenza  $\Omega$  ( $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $A_s = 0.7g$  m/s<sup>2</sup>).

Per avere una migliore comprensione dei cambiamenti nella dinamica

del sistema accoppiato vengono estratte delle storie temporali da alcuni punti significativi delle mappe. Nello specifico, si individuano i punti A, B e C sulle mappe di Fig. 4.3b ( $\Omega = 15 \text{ rad/s}$ ). I risultati sono mostrati in Fig. 4.4, la quale è composta da tre sotto-figure (a, b e c). Ogni sotto-figura mostra:

- Il confronto tra le storie temporali di  $u_1(t)$  e  $\Delta u(t)$  del sistema accoppiato e del sistema non accoppiato;
- Il ciclo di isteresi dell'esoscheletro elasto-plastico;
- Il confronto delle curve di risposta in frequenza di  $u_1(t)$  e  $\Delta u(t)$ , riferite al sistema accoppiato e a quello non accoppiato.

Nei grafici, la linea spessa è utilizzata per il sistema accoppiato mentre quella sottile è utilizzato per la struttura non accoppiata.

La Fig. 4.4a mostra il comportamento del sistema le cui caratteristiche meccaniche sono fornite dalle coordinate di A, che è il punto di minimo assoluto di  $\alpha_2$  nella mappa ottenuta per  $\Omega = 15.0 \text{ rad/s}$ . Il confronto tra le storie temporali del sistema accoppiato e della struttura isolata mostra che l'esoscheletro riduce sia  $u_1$  and  $\Delta u$ . Il ciclo di isteresi mostra che vi è una significativa dissipazione di energia dovuta alla deformazione plastica dell'esoscheletro stesso. L'osservazione delle curve di risposta in frequenza rivela un leggero incremento nella frequenza fondamentale del sistema accoppiato rispetto alla struttura non accoppiata e una riduzione nell'ampiezza degli spostamenti, principalmente dello spostamento  $u_1$ . Le due linee verticali tratteggiate riportate nelle curve di risposta in frequenza corrispondono ad  $\Omega = 15.0$  e  $\Omega = 17.5 \text{ rad/s}$ . Lungo le linee che si riferiscono ad  $\Omega = 15$ , entrambi gli spostamenti del sistema accoppiato  $u_1$  e  $\Delta u$  sono inferiori ai rispettivi spostamenti del sistema non accoppiato. Infatti, il punto A si trova all'interno di entrambe le regioni di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  quando  $\Omega = 15 \text{ rad/s}$ . Al contrario, lungo le linee verticali passanti per  $\Omega = 17.5 \text{ rad/s}$ ,  $\Delta u$  del sistema accoppiato è leggermente superiore a quello del sistema non accoppiato in quanto il punto A si trova all'esterno delle regioni di guadagno di  $\alpha_2$  quando  $\Omega = 17.5 \text{ rad/s}$  (Fig. 4.3b).

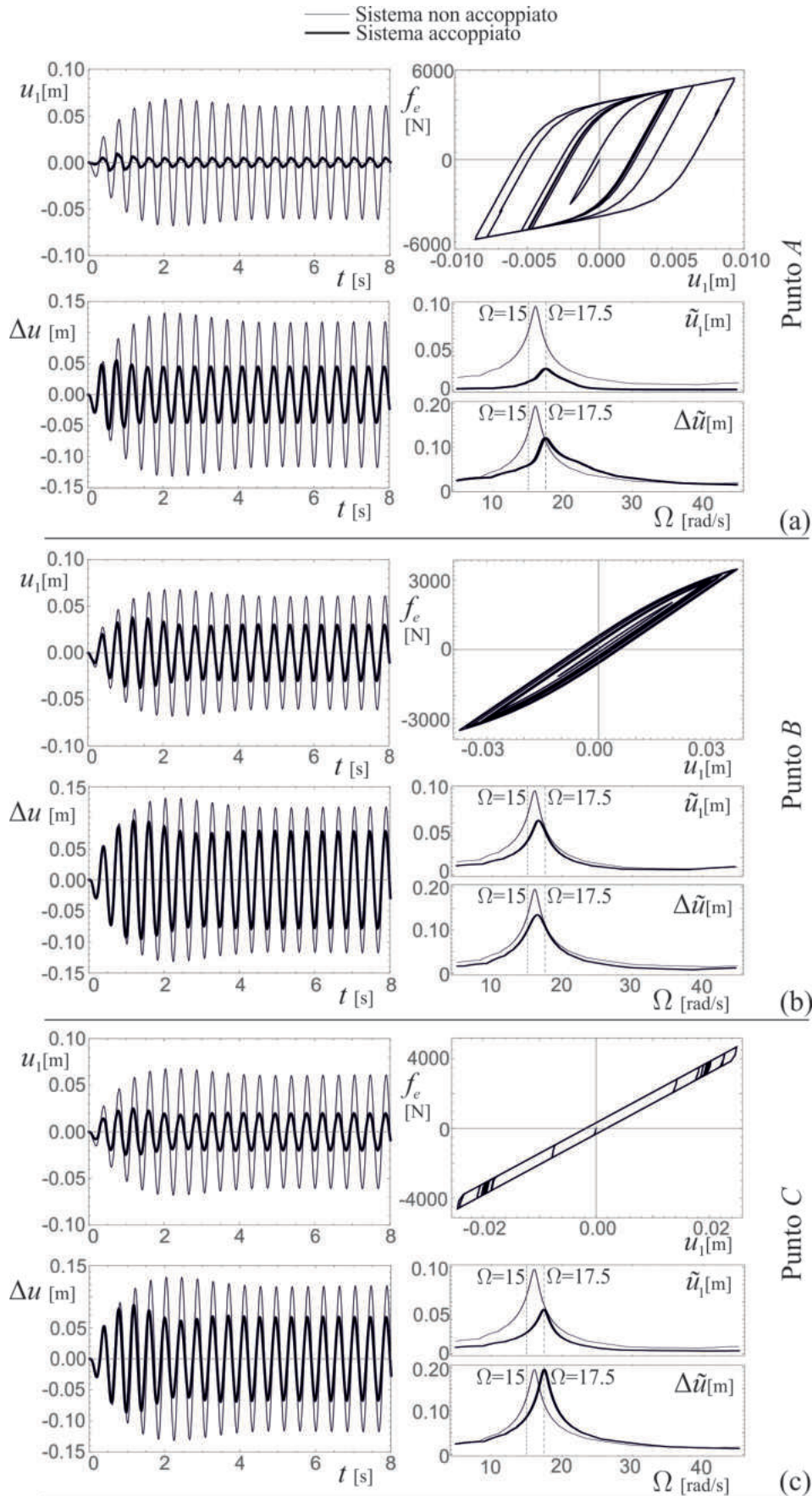
La Fig. 4.4b mostra il comportamento del sistema le cui caratteristiche meccaniche sono fornite dalle coordinate di B. Il punto B si trova all'interno di entrambe le regioni di guadagno, tuttavia esso è prossimo ai confini di queste regioni dove i coefficienti di guadagno sono vicini all'unità (Fig. 4.3b). In questo caso, la differenza tra le ampiezze massime del sistema accoppiato e della struttura non accoppiata è inferiore a quella riscontrata per il punto A. Invece, il ciclo di isteresi mostra una picco-

la dissipazione di energia dovuta alle ridotte deformazioni plastiche dell'esoscheletro. Lungo le linee che si riferiscono ad  $\Omega = 15.0$  e  $\Omega = 17.5$  rad/s, sia  $u_1$  e  $\Delta u$  del sistema accoppiato hanno ampiezze massime solo leggermente inferiori a quelle della struttura non accoppiata.

La Fig. 4.4c mostra il comportamento del sistema le cui caratteristiche meccaniche sono fornite dalle coordinate di C. Tale punto si trova all'interno delle regioni di guadagno di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per  $\Omega = 15.0$  rad/s e all'esterno per  $\Omega = 17.5$  rad/s. Il confronto tra le storie temporali mostra risultati coerenti con i valori di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  nel punto C per  $\Omega = 15.0$  rad/s. Il punto C è caratterizzato da un valore ridotto di  $\eta$ , ovvero un valore ridotto dello spostamento di snervamento  $u_y$ . In riferimento al ciclo di isteresi, si osservano ampie deformazioni plastiche dell'esoscheletro che tuttavia forniscono solo una piccola dissipazione di energia. La curva di risposta in frequenza mostra che l'accoppiamento non influenza l'ampiezza massima di  $\Delta u$  ma sposta solo la frequenza principale del sistema accoppiato verso frequenze maggiori. Lungo le linee verticali per  $\Omega = 15$  rad/s, sia  $u_1$  che  $\Delta u$  del sistema accoppiato hanno ampiezze massime inferiori a quelle della struttura non accoppiata. Al contrario, lungo la linea che identifica  $\Omega = 17.5$  rad/s, solamente  $u_1$  riscontra un leggero beneficio dall'accoppiamento. Inoltre nel punto C si ha una condizione vicina alla risonanza, infatti la frequenza  $\Omega = 17.5$  è molto vicina alla frequenza fondamentale del sistema accoppiato.

Durante l'eccitazione armonica, dopo la dinamica transitoria, il sistema accoppiato raggiunge un moto dinamico caratterizzato da cicli di isteresi stazionari. Per comprendere in maniera più approfondita gli effetti dell'accoppiamento, si consideri il rapporto di smorzamento equivalente  $\xi_{eq}$  dei cicli stazionari. Il valore di  $\xi_{eq}$  è ottenuto eguagliando l'area del ciclo di isteresi  $E_h$  e l'area del ciclo  $E_v$  di un sistema viscoso lineare equivalente, sottoposto alla stessa eccitazione. Come descritto in [90], l'area del ciclo viscoso equivalente è valutata come  $E_v = \pi c_{eq} \omega_{eq} \tilde{u}_1$ , dove  $c_{eq}$  e  $\omega_{eq}$  sono il coefficiente di smorzamento e la frequenza del sistema viscoso equivalente mentre  $\tilde{u}_1$  è il massimo spostamento dell'esoscheletro elasto-plastico che corrisponde alla massima deformazione del sistema equivalente. Per un sistema viscoso lineare ad 1-GDL  $c_{eq} = 2\xi_{eq}\omega_{eq}m$ ,  $\omega_{eq} = \sqrt{k_{eq}/m}$  e  $k_{eq}$  possono essere messi in relazione con la forza raggiunta nel ciclo di isteresi  $\tilde{f}_e$  e con  $\tilde{u}_1$  ( $k_{eq} = \tilde{f}_e/\tilde{u}_1$ ), pertanto il rapporto di smorzamento equivalente è

$$\xi_{eq} = \frac{E_h}{2\pi\tilde{u}_1\tilde{f}_e} \quad (4.10)$$

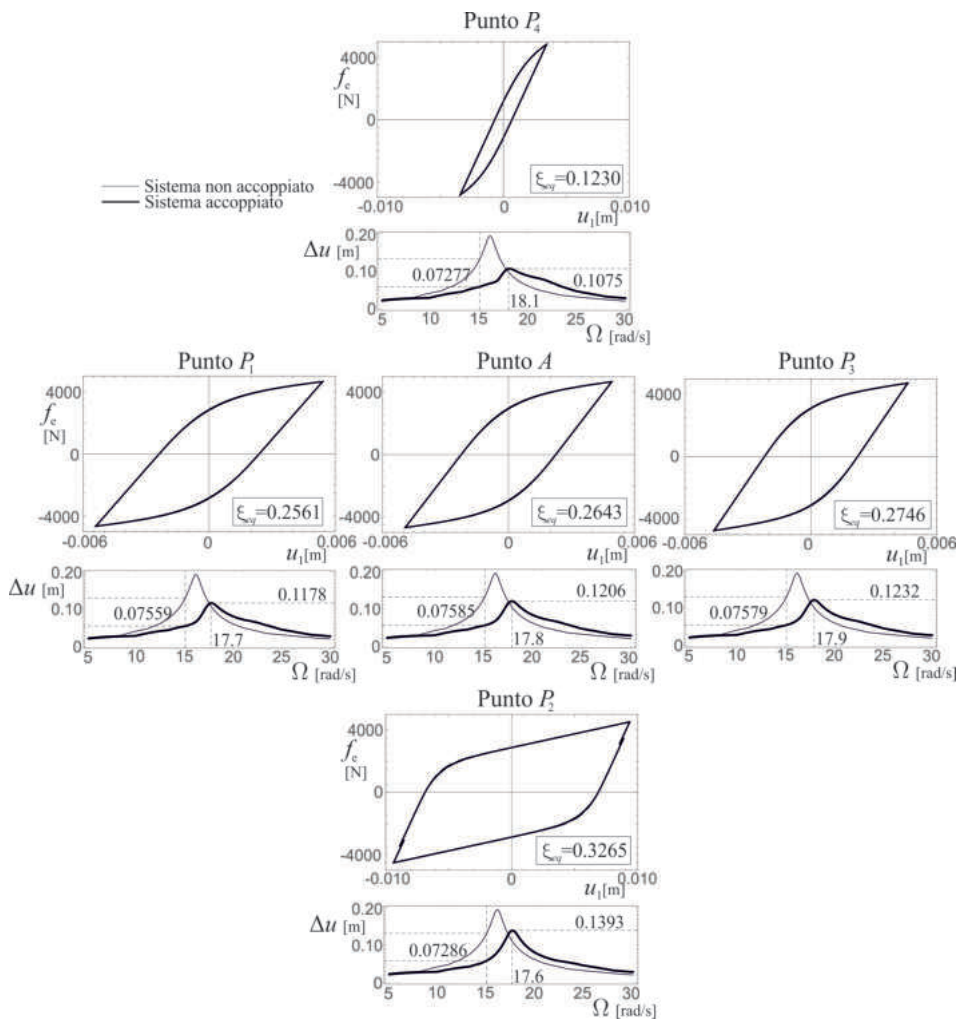


**Fig. 4.4:** Storie temporali, cicli di isteresi e curve ampiezza-frequenza: (a) Punto A; (b) Punto B; (c) Punto C (I punti sono indicati in Fig. 4.3b,  $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $A_s = 0.7g$   $m/s^2$ )

La Fig. 4.5 mostra i cicli di isteresi stazionari e le curve risposta-frequenza di  $\Delta u$  relative ai punti A e  $P_i (i = 1, \dots, 4)$ . Tali punti sono mostrati nella mappa di  $\alpha_2$  per  $\Omega = 15 \text{ rad/s}$  di Fig. 4.3b. Nello specifico, A è localizzato in un punto di minimo assoluto mentre i punti  $P_i$  sono distribuiti in un intorno di A. Per ogni punto investigato, di fianco al ciclo di isteresi è riportato lo smorzamento equivalente  $\zeta_{eq}$ . Per ogni grafico, le curve di risposta in frequenza relative al drift della sovrastruttura mostrano *i*) la frequenza principale del sistema accoppiato e il massimo valore del drift della sovrastruttura (linea spessa) e *ii*) la differenza tra il massimo drift del sistema accoppiato e della struttura non accoppiata in corrispondenza della frequenza  $\Omega = 15 \text{ rad/s}$  (la stessa frequenza della mappa in cui sono riportati i punti A e  $P_i$ ). Lungo la direzione orizzontale, spostandosi dal punto  $P_1$  al punto  $P_3$ , passando per A, si osserva che i valori di  $\zeta_{eq}$  incrementano, seppur di poco. Inoltre, l'incremento della rigidezza elastica dell'esoscheletro, misurata attraverso il parametro adimensionale  $\mu$ , causa un incremento nella frequenza principale del sistema accoppiato e un incremento inferiore nel suo drift massimo. Questi effetti si combinano in modo tale che la differenza maggiore tra il drift del sistema accoppiato e quello del sistema non accoppiato si verifica nel punto A. Spostandosi invece in direzione verticale dal punto  $P_2$  al punto  $P_4$  e passando per A, si ha un incremento progressivo dello spostamento di snervamento  $u_y$ , misurato attraverso il parametro adimensionale  $\eta$ . Questo incremento di  $\eta$  causa una diminuzione dello smorzamento equivalente dei cicli di isteresi. Inoltre, la frequenza principale del sistema accoppiato incrementa e il drift massimo in corrispondenza della frequenza principale diminuisce. Analogamente a prima, questi due effetti si combinano in modo tale che la massima efficacia del sistema si verifichi nel punto A.

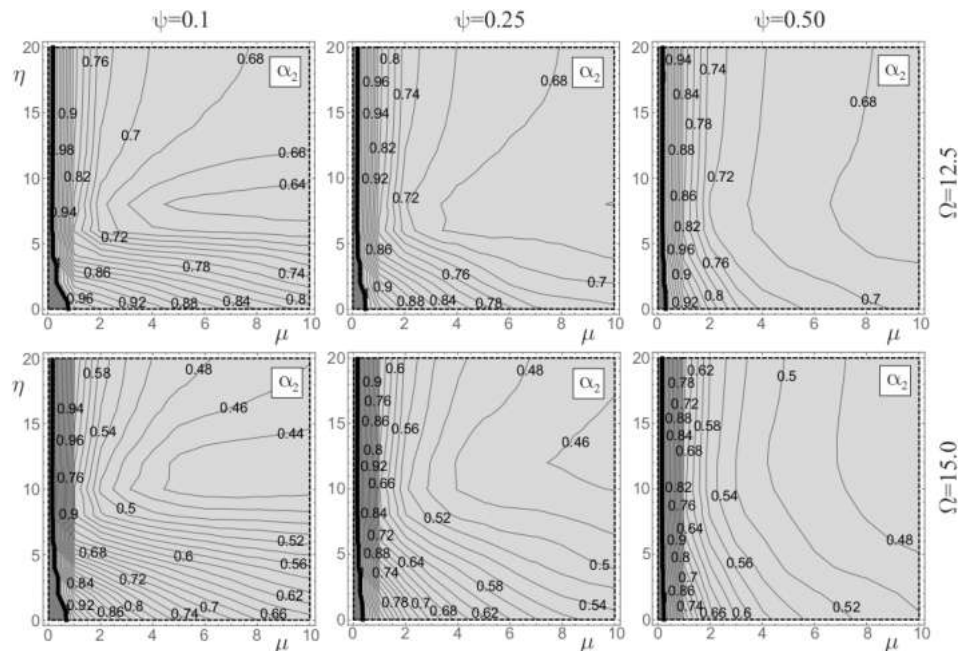
#### 4.2.3.2 Il ruolo della rigidezza post-elastica e della massa dell'esoscheletro

Questa sezione analizza la sensibilità della dinamica del sistema accoppiato a  $\psi$ . Poichè l'accoppiamento con l'esoscheletro porta sempre alla riduzione degli spostamenti della sottostruttura, la Fig. 4.6 mostra solo le mappe  $\alpha_2$  relative alla sovrastruttura. Le mappe sono organizzate in forma matriciale, dove le righe indicano differenti valori di  $\Omega$  e le colonne indicano differenti valori di  $\psi$ . Per entrambi i valori analizzati di  $\Omega$ , l'incremento di  $\psi$  risulta sempre in un decremento dell'efficacia dell'accoppiamento. In generale, quando  $\psi$  aumenta, le curve di livello delle mappe tendono a disporsi in verticale e il punto di minimo assoluto scompare dall'intervallo



**Fig. 4.5:** Cicli di isteresi stazionari e curve ampiezza-frequenza del drift (i punti sono indicati Fig. 4.3b),  $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $A_s = 0.7g \text{ m/s}^2$ .

dei parametri investigati. Quando  $\psi = 1$ , l'esoscheletro è descritto da un comportamento elastico lineare e la risposta del sistema accoppiato non dipende da  $u_y$  o equivalentemente da  $\eta$ .

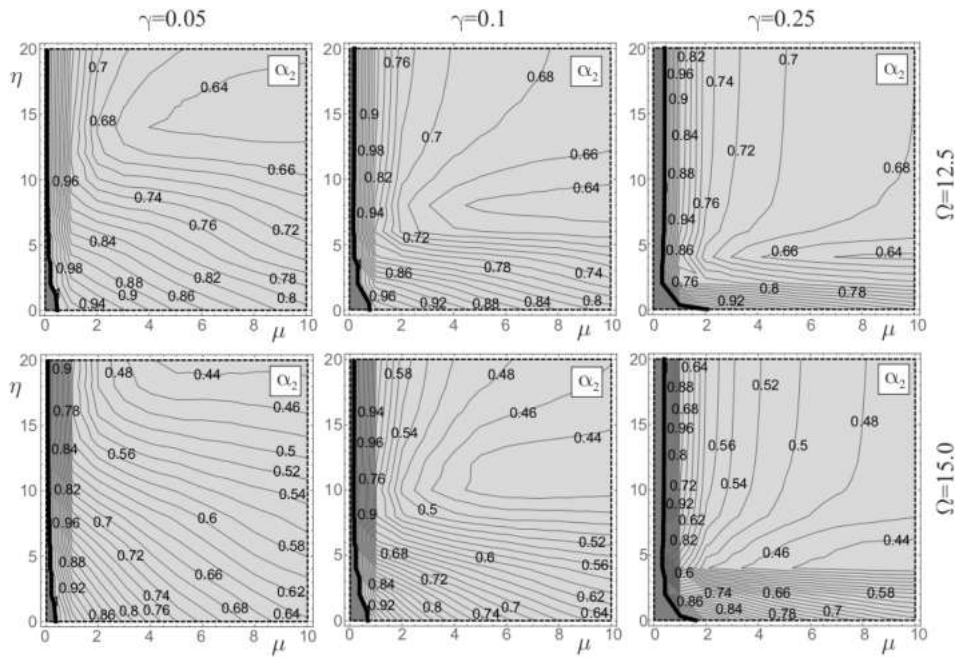


**Fig. 4.6:** Mappe di guadagno relative ad  $\alpha_2$  per differenti valori di  $\psi$  e  $\Omega$  ( $\gamma = 0.1$ ,  $A_s = 0.7g \text{ m/s}^2$ ).

Una seconda analisi mostra la dipendenza della dinamica del sistema accoppiato dalla massa dell'esoscheletro, misurata attraverso il parametro adimensionale  $\gamma$ . Analogamente al caso precedente, la Fig. 4.7 mostra solo le mappe di guadagno relative ad  $\alpha_2$ . Le mappe sono organizzate in forma matriciale, dove le righe si riferiscono a diversi valori di  $\Omega$  e le colonne a diversi valori di  $\gamma$ . Per entrambi i valori di  $\Omega$ , l'incremento di  $\gamma$  modifica sostanzialmente le mappe. Tuttavia non si può dire lo stesso riguardo l'efficacia dell'accoppiamento. Infatti i valori minimi raggiunti da  $\alpha_2$  non variano. L'incremento di  $\gamma$  influenza principalmente la posizione verticale del punto di minimo assoluto di  $\alpha_2$ . Nello specifico, quando  $\gamma$  aumenta, il valore di  $\eta$  che corrisponde al valore di minimo di  $\alpha_2$  diminuisce. Infine, si osserva che il valore di  $\mu$  dove si trova il minimo di  $\alpha_2$  non varia in maniera significativa al variare di  $\gamma$ .

#### 4.2.3.3 Il ruolo dell'ampiezza dell'eccitazione armonica

Il sistema accoppiato è descritto da equazioni non lineari dovute al legame costitutivo isteretico dell'esoscheletro. Di conseguenza, la risposta del sistema accoppiato dipende da  $A_s$ . In questa sezione si analizza la sensibilità della dinamica del sistema accoppiato da  $A_s$ . La Fig. 4.8a mostra



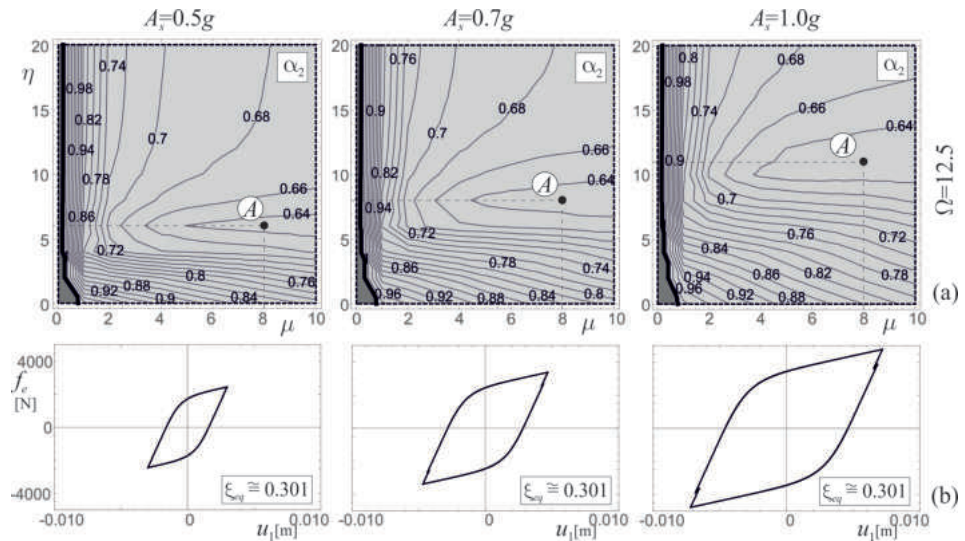
**Fig. 4.7:** Mappe di guadagno relative ad  $\alpha_2$  per differenti valori di  $\gamma$  e  $\Omega$  ( $\psi = 0.1$ ,  $A_s = 0.7g \text{ m/s}^2$ ).

le mappe di guadagno di  $\alpha_2$  riferite ad una frequenza circolare dell'eccitazione armonica  $\Omega = 12.5 \text{ rad/s}$  e ottenute per differenti valori di  $A_s$  (da sinistra a destra l'ampiezza  $A_s$  varia tra  $0.5g$  e  $1.0g$ ). L'efficacia dell'accoppiamento non è influenzata da  $A_s$  poiché i valori di minimo raggiunti da  $\alpha_2$  restano gli stessi in tutte le mappe. Si osserva che il valore di  $\mu$  per cui  $\alpha_2$  è minimo non dipende da  $A_s$ . La Fig. 4.8b mostra i cicli di isteresi stazionari corrispondenti al punto A. È interessante notare che, sebbene le aree di questi cicli sono molto differenti l'una dall'altra,  $\xi_{eq}$  resta pressoché costante ( $\xi_{eq} \cong 0.301$ ).

#### 4.2.4 Analisi sismica

Quattro differenti registrazioni sismiche sono utilizzate come eccitazione per l'analisi sismica. La selezione delle registrazioni è svolta tenendo in conto le differenti caratteristiche spettrali delle registrazioni selezionate. La Fig. 4.9 mostra le storie temporali (grafici a sinistra) e gli spettri di pseudo-accelerazione (grafici a destra). Le registrazioni sismiche considerate sono:

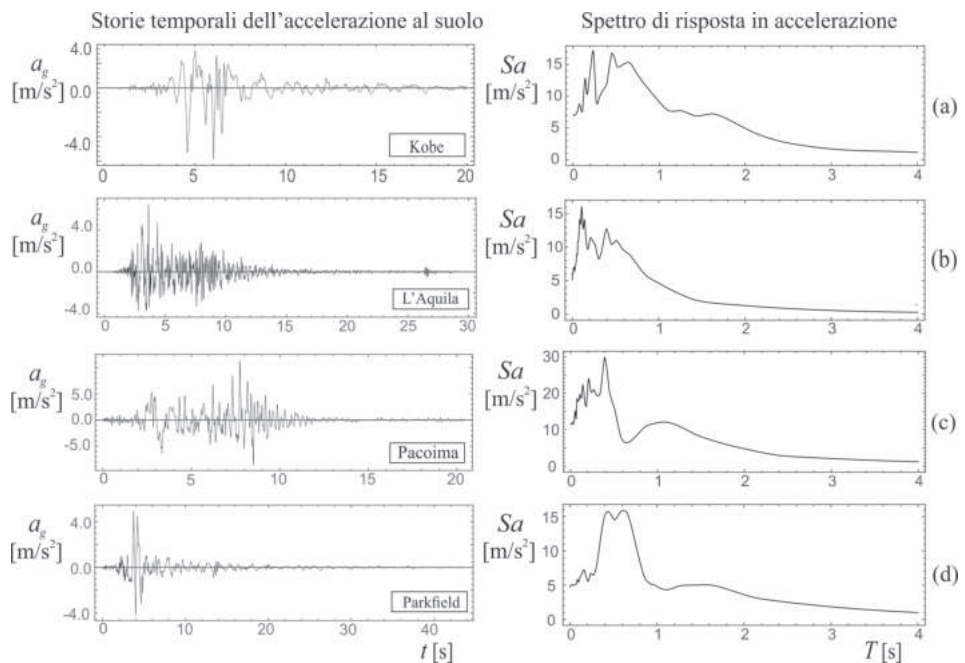
- (a) Kobe, Takarazuka-000 station, registrato durante il terremoto in Giappone del 1995;
- (b) L'Aquila, IT.AQV.HNE.D.20090406.013240.X.ACC station, registrato durante il sisma in Italia del 2009;
- (c) Pacoima, Dam-164 registrato nel 1971 a San Fernando, California;



**Fig. 4.8:** Mappe di guadagno relative ad  $\alpha_2$ : (a) differenti valori delle ampiezze  $A_S$  dell'eccitazione armonica; (b) cicli di isteresi nel punto di minimo A ( $\Omega = 12.5$  rad/s,  $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ).

(d) Parkfield, CO2-065 registrato durante il terremoto della California nel 1966.

A seguire, ogni registrazione sarà chiamata utilizzando il nome sottolineato della lista.



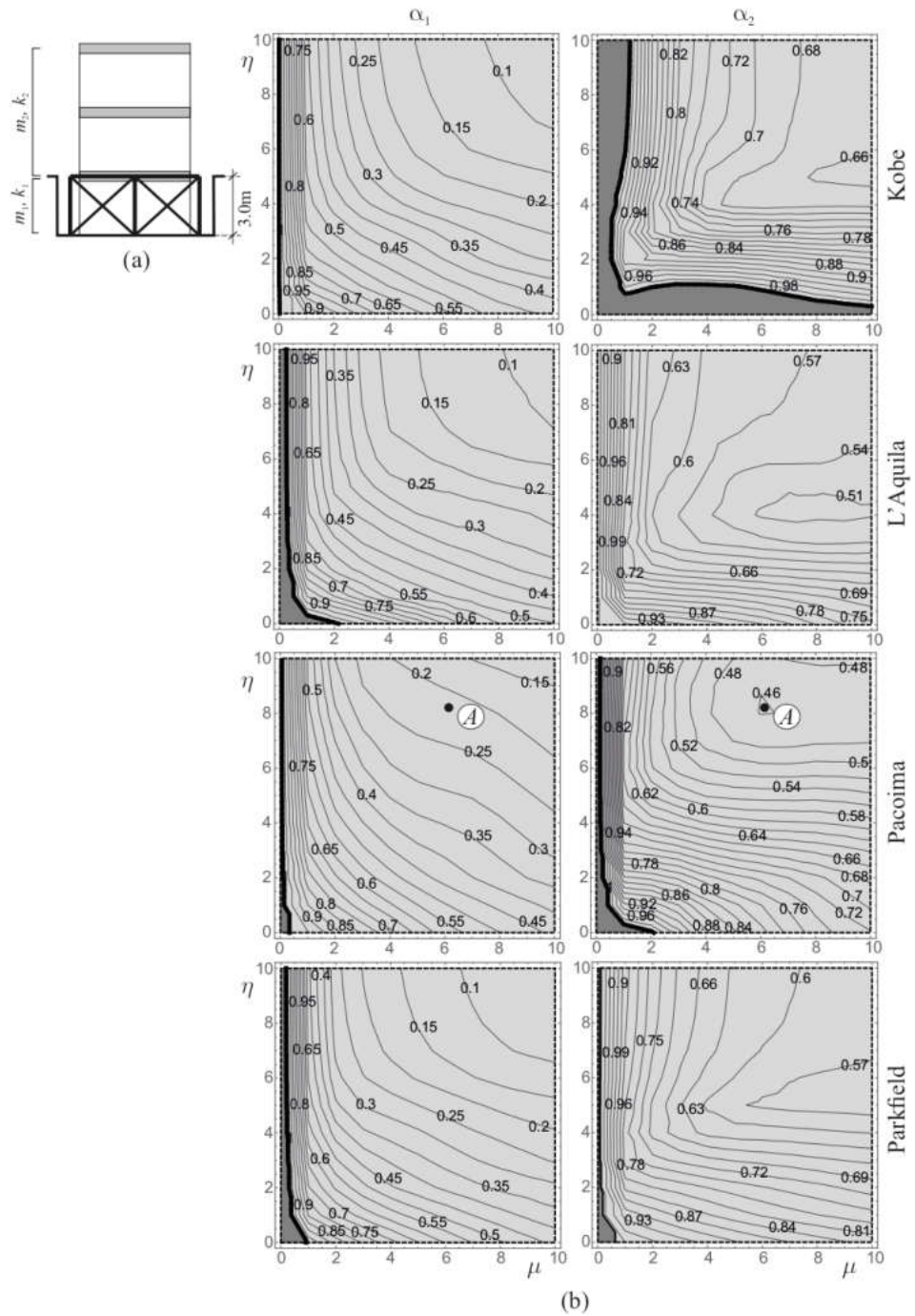
**Fig. 4.9:** Storie temporali e spettri di risposta in pseudo-accelerazione dei terremoti analizzati: (a) Kobe; (b) L'Aquila; (c) Pacoima; (d) Parkfield.

La prima analisi considera la struttura di tre piani le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono riportate nella prima riga di Tab. 4.1 e Tab. 4.2. In Fig. 4.10a viene mostrato che l'accoppiamento con l'esosche-

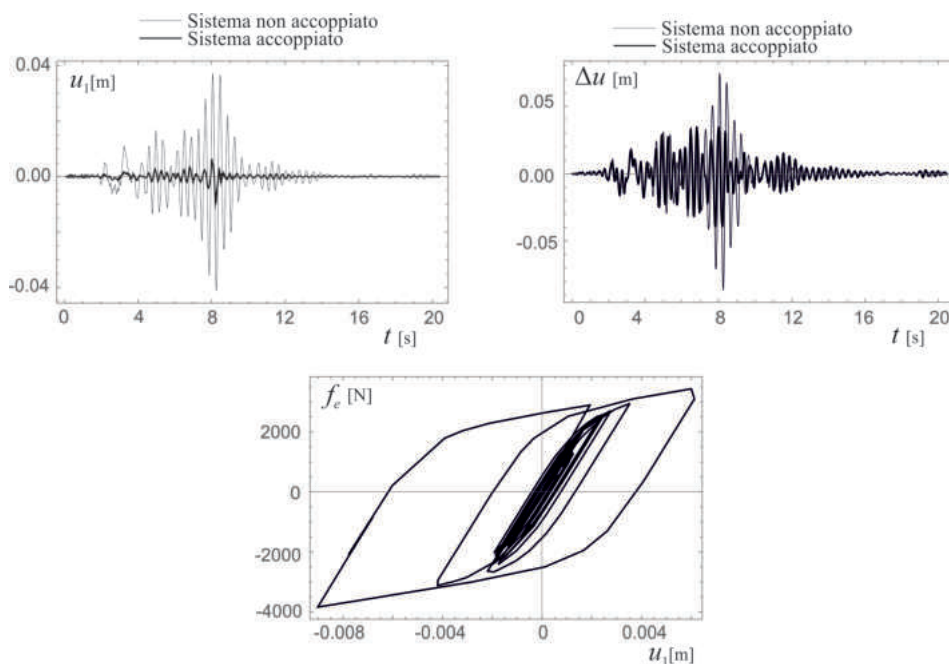
letro è realizzato al primo piano della struttura mentre in Fig. 4.10a sono riportate le mappe di guadagno di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Le mappe di  $\alpha_1$  possiedono ampie regioni di guadagno (evidenziate in grigio chiaro) dove gli spostamenti della sottostruttura sono ridotti dall'accoppiamento. In particolare, poiché  $\alpha_1$  raggiunge valori prossimi a 0.1, la riduzione degli spostamenti raggiunge il 90% rispetto alla stessa struttura non accoppiata. Come era già stato precedentemente evidenziato dall'analisi armonica, anche nella analisi sismica le mappe di  $\alpha_2$  presentano dei punti di minimo assoluto. La posizione di tali punti dipende dalla registrazione sismica utilizzata. Tuttavia, per tutte le registrazioni analizzate, esistono coppie di parametri in grado di ridurre il drift della sovrastruttura. La riduzione degli spostamenti ai piani superiori è sostanziale, infatti considerando ad esempio il punto A nella registrazione sismica di Pacoima si osserva un valore  $\alpha_2 = 0.46$ , ovvero una riduzione di spostamento superiore al 50%.

La Fig. 4.11 riporta le storie temporali di  $u_1(t)$  e  $\Delta u(t)$  e il ciclo di isteresi dell'esoscheletro. Queste curve si riferiscono al punto indicato con A nelle mappe relative a Pacoima di Fig. 4.10. Il confronto tra le storie temporali del sistema accoppiato (linea spessa) e quelle della struttura non accoppiata (linea sottile) mostra una sostanziale riduzione degli spostamenti, sia per la sottostruttura che per la sovrastruttura, dovuta all'accoppiamento. Inoltre il ciclo di isteresi in Fig. 4.11 mostra la dissipazione di energia dovuta allo snervamento dell'esoscheletro.

La seconda analisi considera una struttura di sei piani le cui caratteristiche geometriche e meccaniche sono riportate nella seconda riga di Tab. 4.1 e Tab. 4.2. La Fig. 4.12 riporta solo le mappe di  $\alpha_2$  in quanto il coefficiente  $\alpha_1$  si trova sempre sotto l'unità. I risultati si riferiscono a tre diverse registrazioni (Kobe, L'Aquila, and Parkfield). In questa analisi sono considerati due diversi piani di connessione tra la struttura e l'esoscheletro. Infatti in Fig. 4.12a-b l'esoscheletro è connesso al primo piano della struttura, mentre in Fig. 4.12c-d la connessione viene realizzata al secondo piano. Le caratteristiche meccaniche del modello archetipo equivalente sono riportate nella seconda e terza riga di Tab. 4.2. Le mappe di Fig. 4.12b mostrano una ridotta efficacia dell'accoppiamento, infatti le regioni di guadagno coprono una porzione limitata del piano dei parametri e il valore di minimo di  $\alpha_2$  è molto vicino all'unità. Questo si verifica poiché la dimensione dell'esoscheletro, che copre solamente un piano, è troppo piccola rispetto a quella della sovrastruttura (5 piani) che vuole proteggere. Pertanto è necessario un cambiamento dello schema strutturale. Infatti se si considera una connessione realizzata al secondo piano (Fig. 4.12c) allora il coeffi-



**Fig. 4.10:** (a) Schema geometrico dell'accoppiamento; (b) Mappe di guadagno di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per differenti registrazioni sismiche ( $\psi = 0.1, \gamma = 0.1$ ).

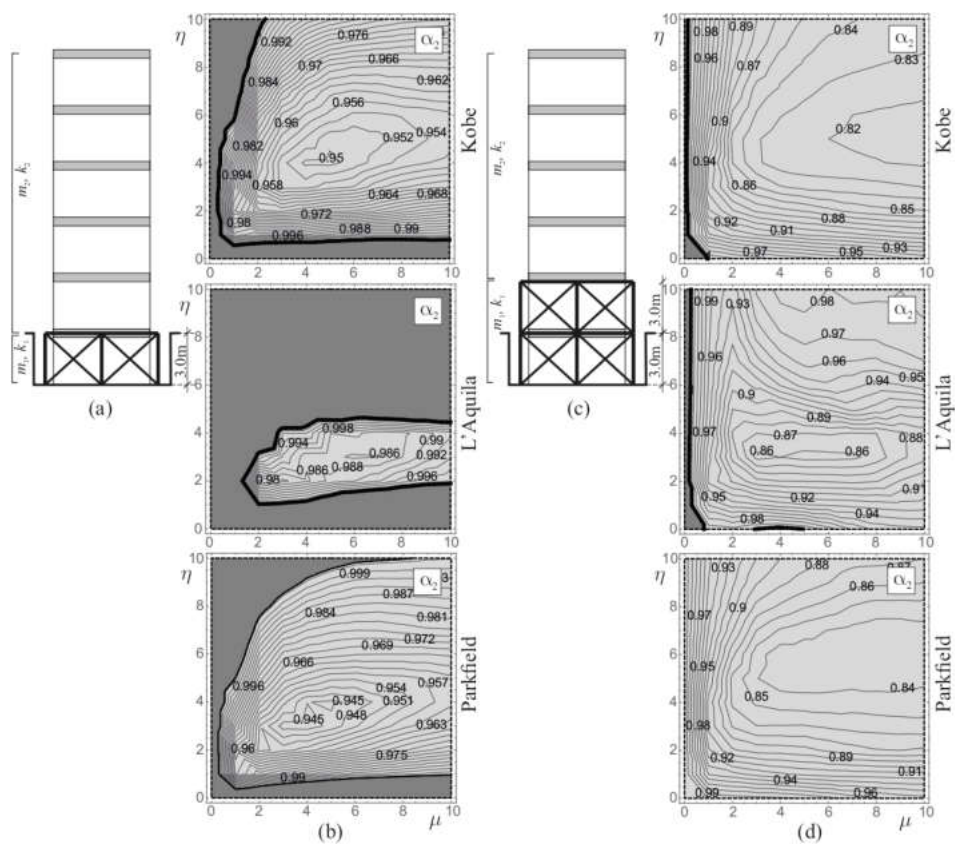


**Fig. 4.11:** Storie temporali e ciclo di isteresi del sistema le cui caratteristiche sono indicate dal punto A in Fig. 4.10 ( $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ).

ciente  $\alpha_2$  si riduce in maniera sostanziale (Fig. 4.12d). Infatti l'incremento di dimensione dell'esoscheletro, che è ora di due piani, e la conseguente riduzione delle dimensioni della sovrastruttura, che scende a quattro piani, causa un allargamento delle regioni di guadagno e un abbassamento del valore di minimo del coefficiente  $\alpha_2$ .

## 4.2.5 Conclusioni

In questa sezione, un telaio modellato attraverso un modello archetipo 2-GDL viene accoppiato ad un esoscheletro, descritto da 1-GDL, per migliorare la risposta dinamica e sismica del telaio stesso. La connessione è realizzata attraverso un link rigido che connette la massa inferiore del modello 2-GDL all'esoscheletro. L'esoscheletro è caratterizzato da un legame costitutivo elasto-plastico descritto dal modello di Bouc-Wen. A causa del collegamento rigido tra telaio ed esoscheletro, il sistema accoppiato è ancora un modello a 2-GDL. Le equazioni non lineari del moto sono ottenute da un approccio diretto e successivamente integrate numericamente per analizzare il comportamento del sistema accoppiato. L'accoppiamento con l'esoscheletro è considerato vantaggioso per la struttura se è in grado di ridurre gli spostamenti della sottostruttura e il drift della sovrastruttura. Sono poi state svolte numerose analisi parametriche, considerando sia eccitazioni di tipo armonico che sismico. I parametri variati nell'analisi sono quelli che caratterizzano il comportamento elasto-plastico dell'esoschele-



**Fig. 4.12:** (a)-(c) Schema geometrico dell'accoppiamento; (b)-(d) Mappe di guadagno di  $\alpha_2$  per differenti registrazioni sismiche ( $\psi = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$ ).

tro. I risultati sono poi organizzati in mappe di guadagno che forniscono i rapporti tra lo spostamento (o il drift) del sistema accoppiato e quelli della stessa struttura non accoppiata. In queste mappe sono evidenziate le zone in cui tali rapporti sono inferiori all'unità, ovvero le zone in cui l'accoppiamento è in grado di migliorare le prestazioni dinamiche del sistema. Le analisi hanno mostrato che ci sono ampie regioni nel piano dei parametri dove l'accoppiamento è in grado di migliorare le prestazioni dinamiche della struttura. In corrispondenza dei punti in cui le mappe hanno il valore di minimo (punti in cui le prestazioni dell'accoppiamento sono massime) i cicli di isteresi sono caratterizzati da un valore elevato del coefficiente di smorzamento equivalente. Le prestazioni sismiche dell'accoppiamento dipendono sia dalle caratteristiche meccaniche dell'accoppiamento che dal contenuto in frequenza dell'eccitazione. Per concludere, si è osservato che l'accoppiamento con l'esoscheletro può essere una valida strategia per migliorare la risposta dinamica e sismica di strutture a telaio.

### **4.3 Accoppiamento deformabile tra telaio ed esoscheletro**

Il sistema accoppiato è composto da un telaio accoppiato al primo piano ad un esoscheletro attraverso un organo visco-elastico (Fig. 4.1). Questo sistema potrebbe apparire simile a quello di 4.2, tuttavia esso presenta una modifica sostanziale. Infatti poiché la connessione tra esoscheletro e telaio è elastica, il funzionamento del sistema accoppiato non è da ricercare nelle sue capacità dissipative, ma nell'alterazione delle sue proprietà dinamiche.

#### **4.3.1 Il sistema meccanico e le equazioni del moto**

Una struttura a telaio viene connessa ad un esoscheletro attraverso un dispositivo visco-elastico. Per il dispositivo visco-elastico si considerano due diversi modelli: *i*) modello di Kelvin-Voight e *ii*) modello di Maxwell. Analogamente alla sezione precedente, si definisce sottostruttura la parte di telaio al di sotto della connessione e sovrastruttura la parte di telaio al di sopra della connessione. Il legame costitutivo assunto sia per il telaio che per l'esoscheletro è elastico lineare. Inoltre, si considerano degli inerter applicati sull'esoscheletro in maniera da modificare la sua forza inerziale.

Il telaio viene modellato attraverso un modello archetipo equivalente a 2-GDL nel quale il primo grado di libertà,  $u_1$ , è lo spostamento della sot-

tostruttura mentre il secondo grado di libertà,  $u_2$ , è lo spostamento della sovrastruttura. L'esoscheletro è descritto da un modello ad 1-GDL il cui spostamento è  $u_e$  (Fig. 4.13a,b). Inoltre nel modello sono adottati degli inerter aventi massa virtuale (o ineranza)  $m_{Re}$  che incrementano la massa dell'esoscheletro al quale sono connessi per mezzo di una struttura rigida a chevron ([58, 59]). Partendo dal modello M-GDL della struttura, le caratteristiche meccaniche del modello archetipo 2-GDL sono derivate dalla procedura riportata in Appendice A.1 dalla quale si ottengono le masse  $m_1$  e  $m_2$  e le rigidezze  $k_1$  e  $k_2$  della sottostruttura e della sovrastruttura. La massa totale dell'esoscheletro è  $m_{te}$ , la quale è somma della massa fisica  $m_e$  e della massa virtuale  $m_{Re}$ , ovvero  $m_{te} = m_e + m_{Re}$ . Gli spostamenti  $u_1$  e  $u_2$  rappresentano, rispettivamente, gli spostamenti del piano connesso all'esoscheletro e dell'ultimo piano del telaio. Lo smorzamento dell'esoscheletro  $c_e$  è ottenuto assumendo che il rapporto di smorzamento del modello 1-GDL sia  $\zeta_e = 0.02$  mentre i coefficienti di smorzamento del modello 2-GDL equivalente alla struttura sono determinati utilizzando la formulazione classica di Rayleigh e assumendo  $\zeta = 0.05$  per entrambi i modi di oscillazione.

Le equazioni del moto sono ottenute con un approccio diretto imponendo l'equilibrio delle forze che agiscono su  $m_1$ ,  $m_2$  e  $m_e$ :

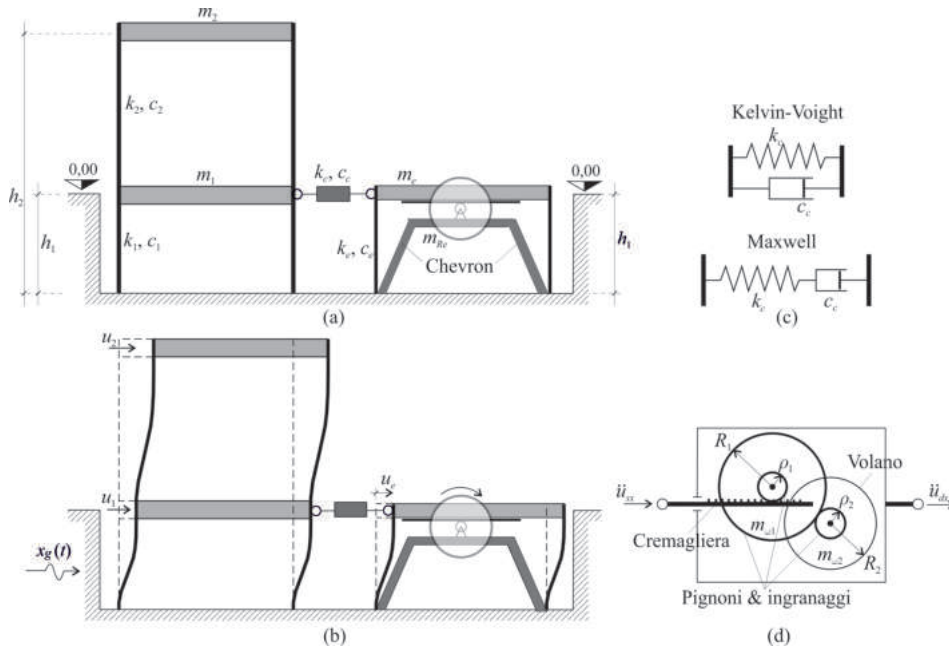
$$m_1 \ddot{u}_1(t) + c_{12} \dot{u}_1(t) - c_{12} \dot{u}_2(t) + (k_1 + k_2) u_1(t) - k_2 u_2(t) - f_c(t) = -m_1 \ddot{x}_g(t)$$

$$m_2 \ddot{u}_2(t) - c_{12} \dot{u}_1(t) + c_{21} \dot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) = -m_2 \ddot{x}_g(t)$$

$$(m_e + m_R) \ddot{u}_e(t) + c_e \dot{u}_e(t) + k_e u_e(t) + k_2 u_2(t) + f_c(t) = -m_e \ddot{x}_g(t) \quad (4.11)$$

dove  $\ddot{x}_g$  è l'accelerazione al suolo e  $f_c$  è la forza di accoppiamento descritta dal legame costitutivo del dispositivo visco-elastico. Si osserva che quando si applica il metodo di rayleigh, si ottiene una matrice di smorzamento piena e simmetrica  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ , dove i  $c_{12} = c_{21}$  che appaiono nella (4.11) sono i termini fuori diagonale di  $\mathbf{C}$ . Due diverse tipologie di dispositivi visco-elastici sono considerati nelle analisi. Il dispositivo di Kelvin-Voight è costituito da una molla elastica lineare e uno smorzatore viscoso connessi in parallelo mentre il dispositivo di Maxwell è rappresentato da una molla e da uno smorzatore connessi in serie (Fig. 4.13c).

Nel caso di dispositivo di Kelvin-Voight, la forza di accoppiamento  $f_c(t)$  è data dalla somma delle forze elastiche e viscoso



**Fig. 4.13:** Sistema meccanico: (a) Caratteristiche geometriche e meccaniche del sistema; (b) Configurazione deformata e parametri lagrangiani (direzioni di positività); (c) Dispositivi di Kelvin-Voight e di Maxwell; (d) Schema dell'inerter.

$$f_c(t) = c_c [\dot{u}_e(t) - \dot{u}_1(t)] + k_c [u_e(t) - u_1(t)] \quad (4.12)$$

Con questa formulazione, il dispositivo di Kelvin-Voight può funzionare anche quando il coefficiente di smorzamento  $c_c$  o la rigidezza della molla  $k_c$  sono nulli.

Nel caso di dispositivo di Maxwell, la forza di accoppiamento  $f_c(t)$  è data da un'equazione differenziale ordinaria al primo ordine che deve essere aggiunta alle equazioni del moto (4.11)

$$\frac{\dot{f}_c(t)}{k_c} + \frac{f_c(t)}{c_c} - [\dot{u}_e(t) - \dot{u}_1(t)] = 0 \quad (4.13)$$

Differentemente dal dispositivo di Kelvin-Voight, il dispositivo di Maxwell non può funzionare quando  $c_c$  o  $k_c$  sono nulli.

I due dispositivi presentano lo stesso comportamento meccanico in due casi limite. Il primo caso limite è quando il dispositivo si comporta come una molla lineare, ovvero quando  $c_c$  del dispositivo Kelvin-Voight è nullo e il  $c_c$  del dispositivo di Maxwell tende ad infinito. Il secondo caso limite è quando il dispositivo funziona come uno smorzatore ovvero  $k_c$  di Kelvin-Voight è nullo e  $k_c$  di Maxwell tende ad infinito.

La descrizione dettagliata del dispositivo inerter è riportata nell'introdu-

zione, ma si ricorda che la forza resistente dell'inerter è pari a

$$F_{ID} = m_R(\ddot{u}_{dx} - \ddot{u}_{sx}) \quad (4.14)$$

e la massa virtuale è:

$$m_R = \frac{1}{2}m_{\omega 1} \frac{R_1^2}{\rho_1^2} + \frac{1}{2}m_{\omega 2} \frac{R_1^2 R_2^2}{\rho_1^2 \rho_2^2} + \dots + \frac{1}{2}m_{\omega N} \frac{R_1^2 R_2^2 \dots R_i^2 \dots R_N^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 \dots \rho_i^2 \dots \rho_N^2} \quad (4.15)$$

dove N è il numero di volani. Quando collegato ad una struttura, un inerter opera uno scambio di energia cinetica con la struttura. In alcuni casi, per proteggere quest'ultima, può essere necessario limitare tale scambio adottando dispositivi specifici (ad esempio frizioni) come mostrato in [58]. In questa tesi, le analisi sono svolte senza limitare lo scambio di energia cinetica.

### 4.3.2 Caratteristiche della struttura e coefficienti di guadagno

Le caratteristiche dei modelli archetipi 2-GDL, che rappresentano due diversi telai shear-type, sono riportate in Tab. 4.3. Per ogni telaio si assume che l'altezza interpiano e la massa di piano restino uguali ad ogni piano.

**Tabella 4.3:** Caratteristiche geometriche e meccaniche delle due strutture di riferimento

Piani	Piano di conness.	Superficie	Massa di piano $m_s$	Altezza interpiano
4	1	250 m <sup>2</sup>	301.5x10 <sup>3</sup> kg	3 m
6	1	400 m <sup>2</sup>	482.4x10 <sup>3</sup> kg	3 m

Le caratteristiche dinamiche dei modelli equivalenti 2-GDL sono riportate in Tab. 4.4.

**Tabella 4.4:** Caratteristiche meccaniche del modello archetipo

Piani	$k_1$ [N/m]	$k_2$ [N/m]	$m_1$ [kg]	$m_2$ [kg]
4	6.610823x10 <sup>8</sup>	2.034100x10 <sup>8</sup>	301.5x10 <sup>3</sup>	904.5x10 <sup>3</sup>
6	1.322957x10 <sup>9</sup>	2.657336x10 <sup>8</sup>	482.4x10 <sup>3</sup>	2412.0x10 <sup>3</sup>

Nelle analisi viene adottata la seguente parametrizzazione:

- Rapporto tra la rigidezza dell'esoscheletro e la rigidezza della sottostruttura

$$\rho_e = \frac{k_e}{k_1} \quad (4.16)$$

- Rapporto tra la rigidezza del dispositivo di accoppiamento e la rigidezza della sottostruttura

$$\rho_c = \frac{k_c}{k_1} \quad (4.17)$$

- Rapporto tra la massa dell'esoscheletro e la massa totale della struttura

$$\mu = \frac{m_e}{m_1 + m_2} \quad (4.18)$$

- Rapporto tra la massa virtuale associata all'inerter e la massa della sottostruttura

$$\sigma = \frac{m_R}{m_1} \quad (4.19)$$

- Parametro adimensionale per il coefficiente di smorzamento del dispositivo di accoppiamento

$$\gamma = \frac{c_c}{2\omega_1(m_1 + m_2)} \quad (4.20)$$

Nella (4.20)  $\omega_1$  è la frequenza circolare del primo modo del telaio non accoppiato. Il parametro adimensionale  $\gamma$  parametrizza il coefficiente di smorzamento  $c_c$  di entrambi i dispositivi viscoelastici, come in [91].

Il confronto tra lo spostamento  $u_1$  e il drift  $\Delta u = u_2 - u_1$  della struttura accoppiata e di quella non accoppiata fornisce una misura dell'efficienza dell'accoppiamento. Pertanto si introducono due coefficienti di guadagno:

$$\alpha_1 = \frac{\max |u_1(t)|}{\max |\tilde{u}_1(t)|}, \quad \alpha_2 = \frac{\max |u_2(t) - u_1(t)|}{\max |\tilde{u}_2(t) - \tilde{u}_1(t)|} = \frac{\max |\Delta u(t)|}{\max |\Delta \tilde{u}(t)|} \quad (4.21)$$

dove gli spostamenti  $\tilde{u}_1$  e  $\tilde{u}_2$  sono quelli del telaio non accoppiato. Dalla (4.21) segue che più sono bassi i valori di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  rispetto all'unità, maggiore è l'efficacia dell'accoppiamento. L'obiettivo delle analisi parametriche è valutare gli indici di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per ogni set di parametri variabili e rappresentare tali valori in uno specifico piano dei parametri, realizzando così le mappe di guadagno. Differenti analisi parametriche sono svolte considerando le due diverse tipologie di dispositivi di accoppiamento.

### 4.3.3 Analisi modale

Un'analisi preliminare valuta gli effetti dell'accoppiamento e dell'inerter sulle caratteristiche spettrali della struttura accoppiata. Entrambe le frequenze e i modi di vibrazione della struttura accoppiata sono ottenuti as-

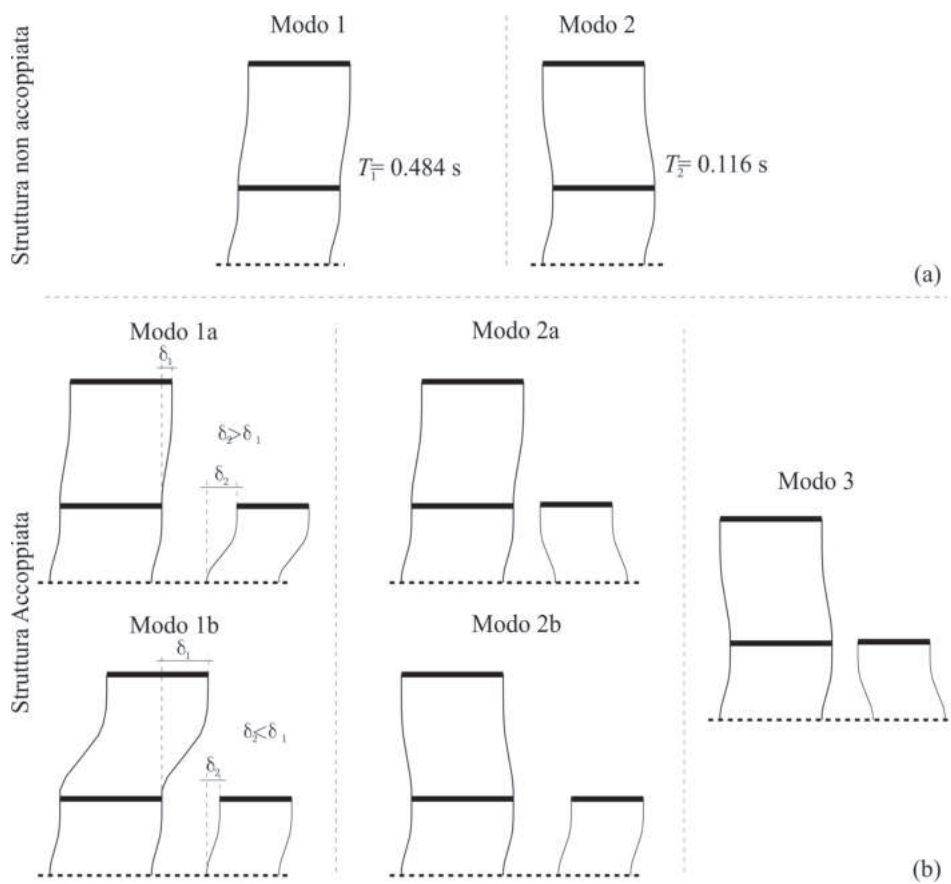
sumendo uno smorzamento della struttura costante e uno smorzamento variabile sul dispositivo di accoppiamento. Per questo motivo le equazioni del moto (4.11) sono scritte nello spazio di stato e gli autovalori assumono valori complessi e coniugati. Le frequenze e gli spostamenti modali del sistema sono rappresentati, rispettivamente, dalle parti immaginarie degli autovalori e degli autovettori ([30]). Le analisi in questa sezione sono riferite ad un telaio a quattro piani le cui caratteristiche del telaio di riferimento sono riportate nella prima riga di Tab. 4.3 e quelle del corrispondente modello archetipo nella prima riga di Tab. 4.4.

#### 4.3.3.1 Il dispositivo di Kelvin-Voight

Nella prima analisi il dispositivo di accoppiamento tra telaio ed esoscheletro è di tipo Kelvin-Voight. La Fig. 4.14 mostra le forme modali della struttura non accoppiata e di quella accoppiata. Nello specifico, la Fig. 4.14a mostra i due periodi e le forme modali del modello 2-GDL della struttura non accoppiata. Tali periodi e forme modali dipendono solamente dalle caratteristiche della struttura e quindi non variano all'interno del piano dei parametri<sup>1</sup>. La Fig. 4.14b mostra le forme modali della struttura accoppiata. Tali forme modali dipendono dai parametri dell'accoppiamento. In particolare, un sistema con valori fissi di  $k_c$  e  $k_e$  può avere modi differenti (Modo 1a oppure Modo 1b) al variare di  $m_{te}$ . Poiché  $m_e$  è costante e i suoi valori sono derivati assumendo  $\mu = 0.1$ , allora  $m_{te}$  può essere incrementata solo variando le caratteristiche dell'inerter, ovvero cambiando  $m_R$ . Il Modo 1a richiede un valore maggiore di  $m_{te}$  rispetto al Modo 1b e il suo periodo è generalmente più alto del Modo 1b. La variazione tra il Modo 2a e il Modo 2b dipende dagli stessi parametri, ovvero  $k_c$ ,  $k_e$  e  $m_{te}$ . Invece il Modo 3 ha la stessa forma per tutti i valori dei parametri all'interno dell'intervallo analizzato. Infine, si osserva che il periodo del primo modo accoppiato è generalmente più alto del periodo della struttura non accoppiata. I periodi del secondo e del terzo modo della struttura accoppiata sono molto vicini, rispettivamente, al primo e al secondo modo della struttura non accoppiata. Inoltre questi periodi mostrano una ridotta sensibilità al cambiamento dei parametri variati nelle analisi.

L'analisi parametrica effettuata permette di comprendere la sensibilità dei periodi e delle forme modali alle caratteristiche principali della struttura accoppiata. I periodi e i modi della struttura accoppiata sono organizzati in mappe. Tali mappe mostrano i periodi e i modi del sistema ac-

<sup>1</sup>I parametri variabili sono le caratteristiche del dispositivo di accoppiamento di Kelvin-Voight.



**Fig. 4.14:** Analisi modale con dispositivo di accoppiamento di tipo Kelvin-Voight: a) Periodi e forme modali della struttura non accoppiata; b) Forme modali della struttura accoppiata.

coppiato all'interno del piano dei parametri  $\rho_e - \rho_c$  definiti nell'Eq. (4.16) e nell'Eq. (4.17). La Fig. 4.15 mostra dodici mappe organizzate in forma matriciale, dove le colonne si riferiscono ai tre periodi della struttura accoppiata e le righe si riferiscono a diversi valori di  $\sigma$ . Le mappe mostrano anche la forma del modo attraverso delle etichette che utilizzano la stessa nomenclatura adottata in Fig. 4.14. Quando non vi sono inerter ( $\sigma = 0$ , prima riga delle mappe), la prima e la seconda forma modale sono le stesse per tutti i punti del piano dei parametri  $\rho_e - \rho_c$  e coincidono con le forme modali della struttura non accoppiata. Inoltre i rispettivi periodi della struttura accoppiata e non accoppiata sono molto vicini l'uno con l'altro in tutto il piano dei parametri. La ragione è che, poiché il valore di  $m_e$  è piccolo (ovvero il rapporto di massa è  $\mu = 0.1$ ), l'effetto dell'esoscheletro sulla dinamica della struttura accoppiata è quasi trascurabile. Le altre tre righe di Fig. 4.15 si riferiscono a valori crescenti di  $\sigma$ . La presenza dell'inertter cambia le prime due forme modali dentro il piano dei parametri. Nelle mappe, le linee spesse dividono il piano dei parametri in due regioni caratterizzate da differenti forme modali. La dimensione delle regioni dove vi è il Modo 1a aumenta significativamente con  $\sigma$ . Il periodo del primo modo, nelle regioni dove vi è il Modo 1a, è significativamente più alto del periodo del primo modo della struttura non accoppiata. Il periodo del secondo modo dentro la regione dove si trova il Modo 2a è vicino al periodo del primo modo della struttura non accoppiata. Il miglioramento della dinamica del sistema accoppiato è atteso quindi nella zona dove si trova il Modo 1a, ovvero dove il periodo ha valori maggiori. Questo può essere spiegato guardando la forma modale del Modo 1a in Fig. 4.14b dove lo spostamento dell'esoscheletro prevale sullo spostamento della struttura.

Per valutare come i modi influenzano la dinamica dell'accoppiamento, si ottengono i coefficienti di massa partecipante (MPC) dei primi due modi della struttura accoppiata [62]. Tali MPC sono organizzati in mappe costruite nel piano dei parametri  $\rho_e - \rho_c$ . La Fig. 4.16 mostra sei mappe disposte come una matrice, dove le colonne si riferiscono al MPC dei primi due modi della struttura accoppiata mentre le righe si riferiscono a differenti valori di  $\sigma$ . Le mappe di Fig. 4.16 sono ottenute per  $\gamma = 0$ . Le linee spesse e le etichette hanno lo stesso significato di quelle in Fig. 4.15. Quando non vi sono inerter (prima riga della figura) entrambi gli MPC hanno valori comparabili. Al contrario quando si includono gli inerter, il MPC del Modo 1a è molto più alto del MPC del Modo 2a, che diventa quasi trascurabile. Pertanto la dinamica del Modo 1a diventa prevalente. Nelle regioni caratterizzate dal Modo 1b, gli MPC dei primi due modi sono com-

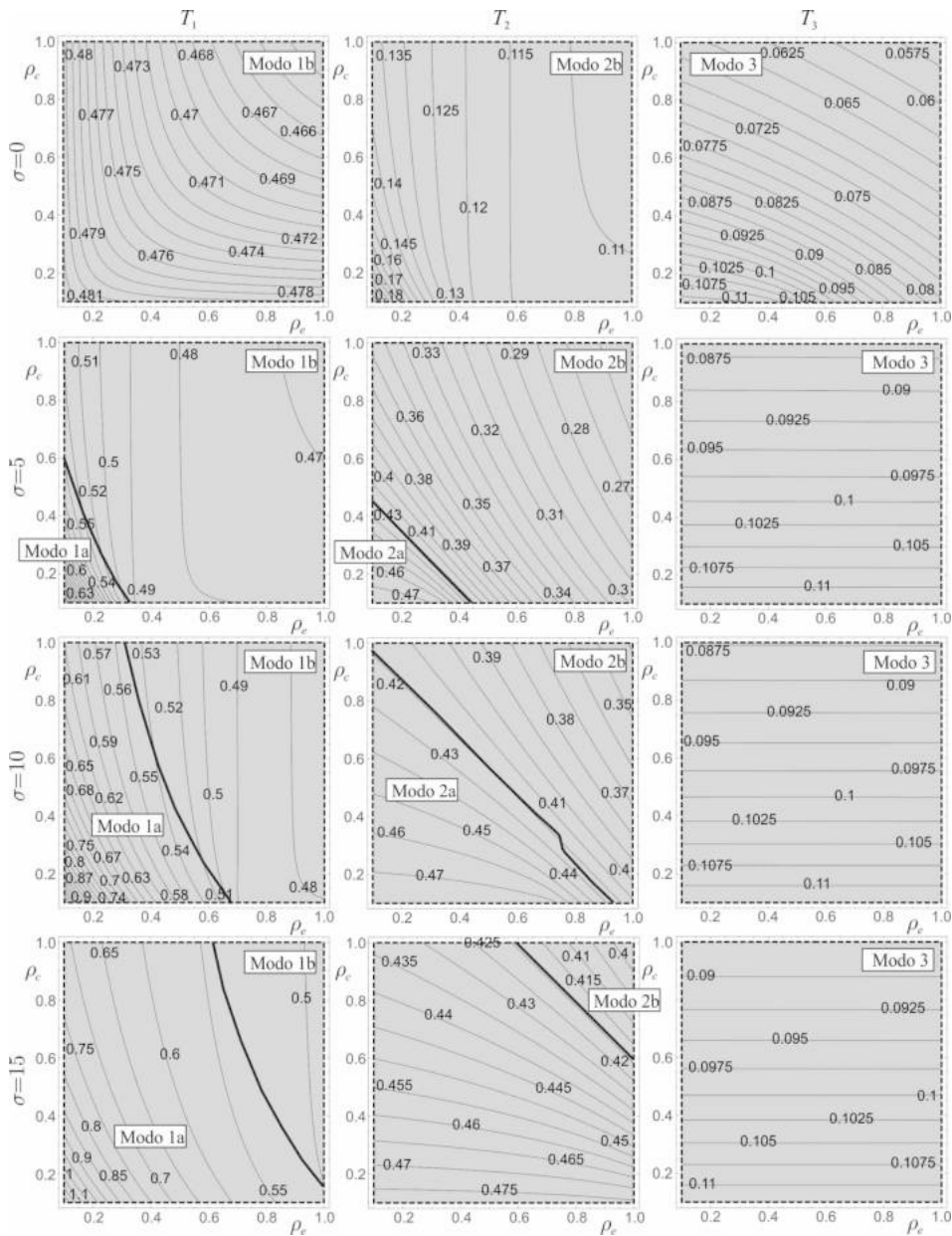
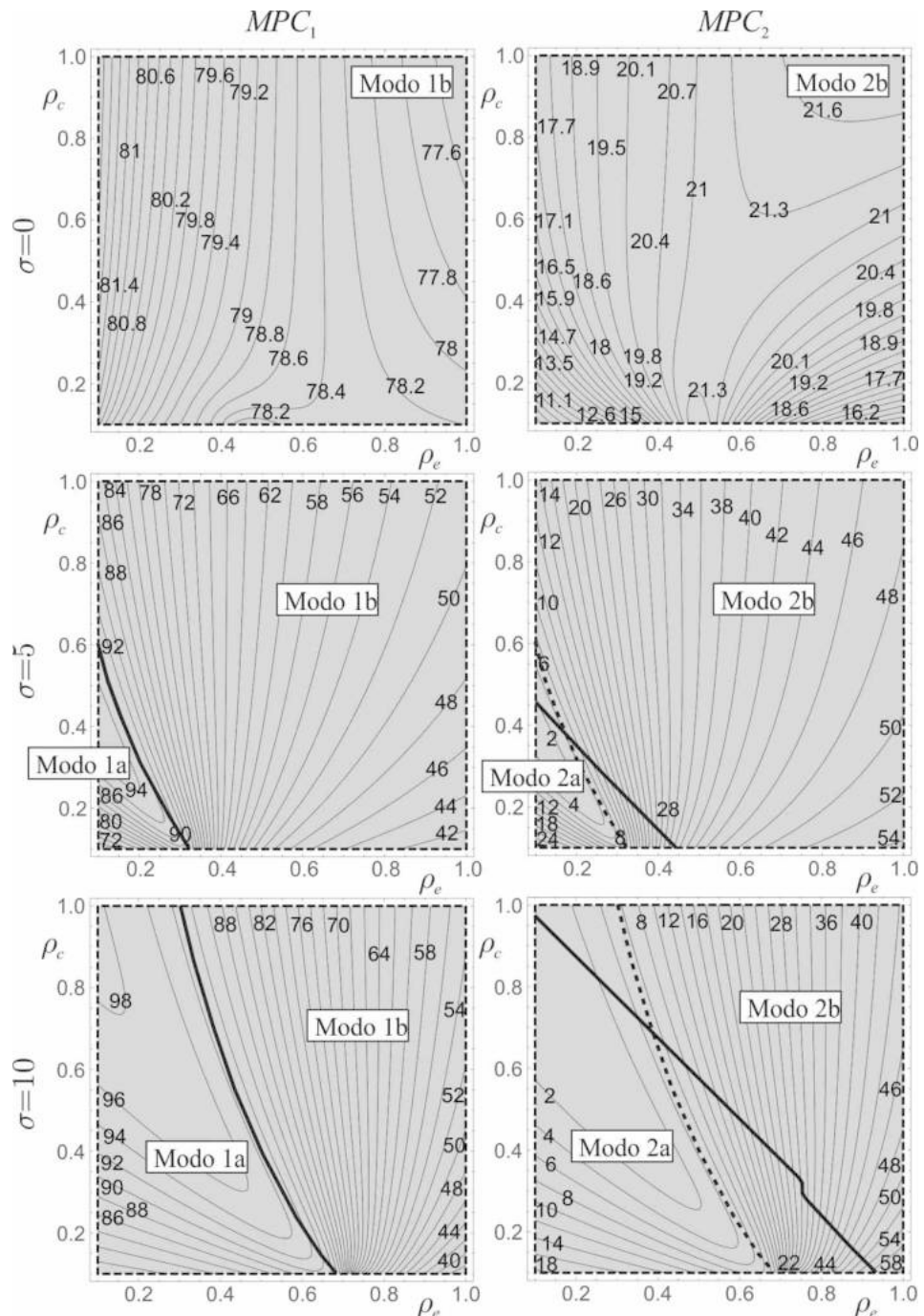


Fig. 4.15: Mappe modali della struttura accoppiata con un dispositivo di Kelvin-Voight ( $\gamma = 0$ ).

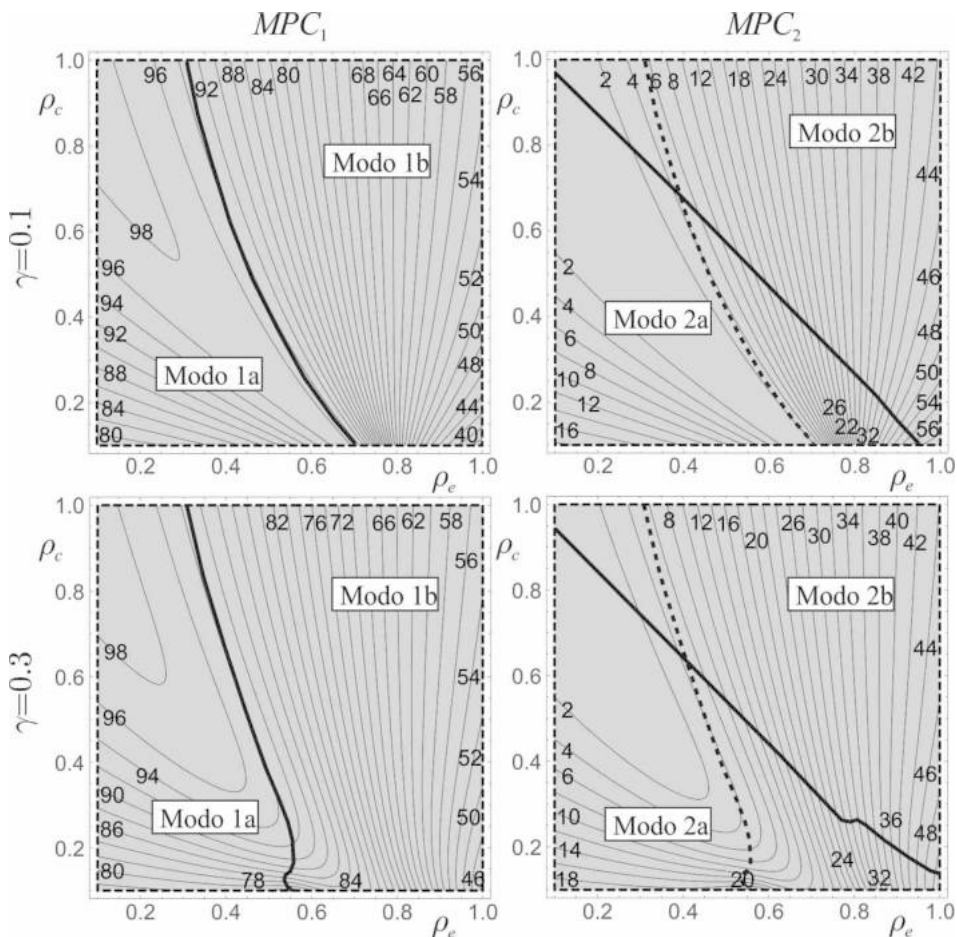
parabili tra di loro. Le mappe nella colonna a destra di Fig. 4.16 mostrano anche che le regioni dove si trovano il Modo 1a e il Modo 2a hanno più o meno la stessa dimensione nel piano  $\rho_e - \rho_c$ . In queste mappe, i confini tra il Modo 1a e il Modo 1b sono mostrati con linee spesse tratteggiate mentre i confini tra il Modo 2a e il Modo 2b sono mostrati da linee spesse continue.



**Fig. 4.16:** Mappa dei MPC della struttura accoppiata con dispositivo di Kelvin-Voight per differenti valori di  $\sigma$  ( $\gamma = 0$ ).

L'ultima analisi parametrica eseguita investiga il ruolo di  $\gamma$ , ovvero la sensibilità della dinamica della struttura accoppiata allo smorzamento del

dispositivo di Kelvin-Voight. La Fig. 4.17 mostra quattro mappe disposte in forma di matrice. Nella figura, le colonne si riferiscono agli MPC dei primi due modi della struttura accoppiata e le righe si riferiscono a differenti valori di  $\gamma$ . Le mappe sono ottenute per  $\sigma = 10$ . Si osserva che MPC mostra una sensibilità ridotta rispetto a  $\gamma$  e di conseguenza il valore di  $\gamma$  non modifica in maniera sostanziale la dinamica della struttura accoppiata.



**Fig. 4.17:** Mappa dei MPC della struttura accoppiata con dispositivo di Kelvin-Voight per differenti valori di  $\gamma$  ( $\sigma = 10$ ).

#### 4.3.3.2 Il dispositivo di Maxwell

Questa sezione interessa l'accoppiamento tra una struttura a telaio e un esoscheletro connessi tra loro per mezzo di un dispositivo di Maxwell. Si osserva che, a causa della struttura matematica delle equazioni del moto Eq. (4.11) ed Eq. (4.13) è impossibile utilizzare MPC convenzionale. Inoltre si ricorda che in un dispositivo di Maxwell  $\gamma = 0$  equivale a disaccoppiare il telaio e l'esoscheletro.

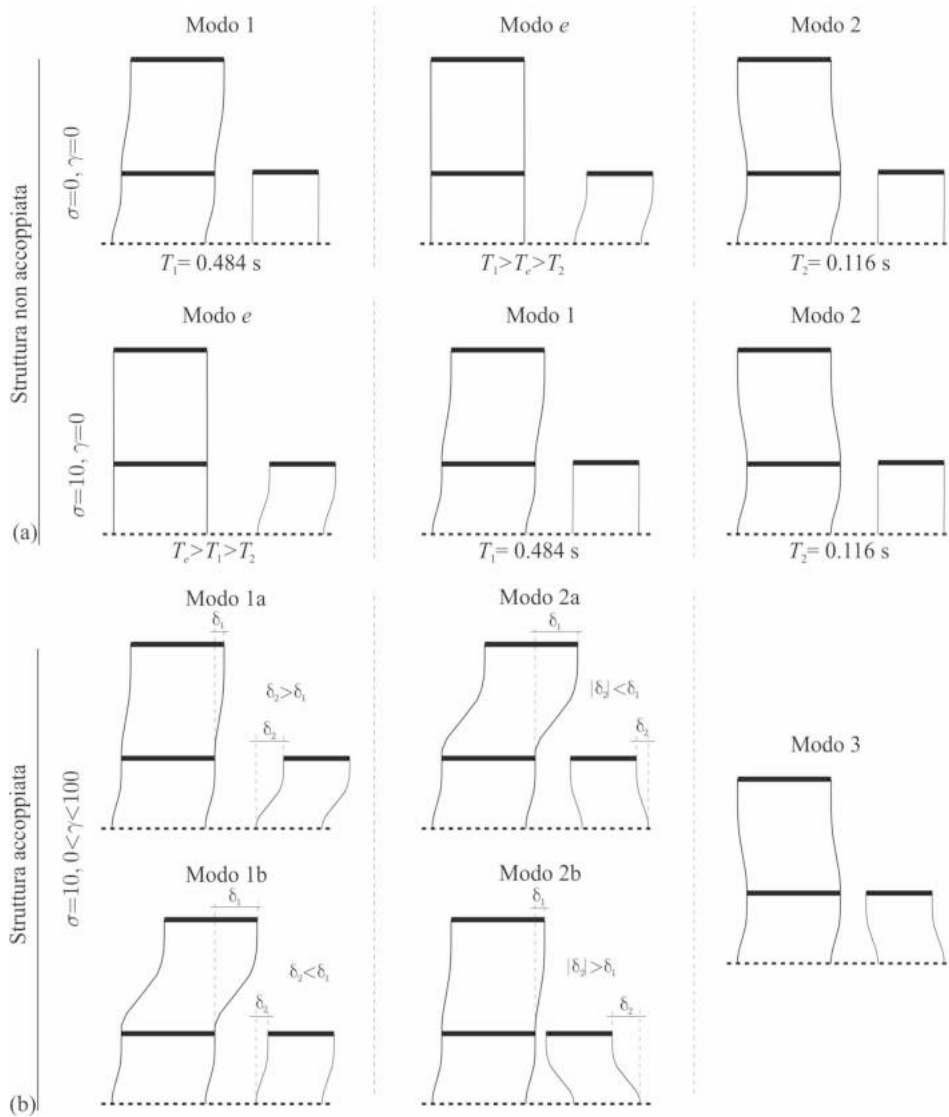
La prima riga di Fig. 4.18a mostra i periodi e le forme modali dei tre

modi della struttura non accoppiata con  $\gamma = 0$  e  $\sigma = 0^2$ . I periodi del Modo 1 e del Modo 2 sono gli stessi della struttura non accoppiata mostrata in Fig. 4.14a. Il sistema ammette anche il Modo disaccoppiato e che coinvolge solo l'esoscheletro esterno. Se si considerano degli inerter applicati all'esoscheletro con il sistema ancora disaccoppiato, solo il periodo del modo relativo all'esoscheletro e l'ordine dei modi cambiano, come mostrato nella seconda riga di Fig. 4.18a.

Un valore di  $\gamma \neq 0$  accoppia il telaio e l'esoscheletro esterno. Le analisi parametriche condotte su strutture accoppiate da un dispositivo di Maxwell sono svolte su valori molto piccoli di  $\gamma$  in quanto il comportamento del dispositivo di Maxwell tende a quello di Kelvin-Voight quando  $\gamma$  tende ad infinito. Di conseguenza, in questa analisi si considera  $0 < \gamma < 100$  cosicché l'utilizzo di un dispositivo di Maxwell conduca ad una dinamica differente di quella osservata per un dispositivo di Kelvin-Voight. La Fig. 4.18b mostra le forme modali dei tre modi della struttura accoppiata e tali forme modali sono una combinazione dei modi della struttura non accoppiata mostrata in Fig. 4.18a. In questa analisi, le forme dei primi due modi della struttura accoppiata dipendono solo dalla rigidità di accoppiamento  $k_c$  e dalla rigidità della struttura esterna  $k_e$  in quanto le forme modali di Fig. 4.18b sono ottenute per  $\sigma = 10$ . In generale, anche in questo sistema il periodo del primo modo della struttura accoppiata è più elevato di quello del telaio non accoppiato e i periodi del secondo e terzo modo della struttura accoppiata sono vicini ai periodi del primo e del secondo modo della struttura isolata. In maniera simile al dispositivo di Kelvin-Voight, tali periodi mostrano una sensibilità limitata ai cambiamenti dei parametri che caratterizzano la struttura accoppiata.

In maniera simile a come si è operato per il dispositivo di Kelvin-Voight, anche per il dispositivo di Maxwell si svolge un'analisi parametrica per indagare la sensibilità della dinamica della struttura accoppiata rispetto ai parametri  $\rho_e - \rho_c$ . La Fig. 4.19 mostra i periodi dei tre modi della struttura accoppiata organizzati in dodici mappe disposte a forma di matrice, dove le colonne si riferiscono a differenti periodi della struttura accoppiata e le righe a differenti valori di  $\gamma$ . Le mappe sono ottenute per  $\sigma = 10$ . Dentro ogni mappa, le etichette indicano le forme modali relative a differenti valori del periodo e la nomenclatura adottata è la stessa di Fig. 4.18. In tutte le mappe si osservano cambiamenti nelle forme modali. Nelle mappe, le linee spesse dividono il piano dei parametri in regioni caratterizzate da diverse forme modali. La dimensione delle regioni dipende fortemente

<sup>2</sup>In altre parole, la struttura non è accoppiata e non vi sono dispositivi inerter.



**Fig. 4.18:** Analisi modale della struttura accoppiata da un dispositivo di Maxwell: (a) Periodi e forme modali della struttura non accoppiata; (b) Forme modali della struttura accoppiata.

da  $\gamma$ . Inoltre, il periodo del Modo 1a è significativamente più alto del periodo della struttura non accoppiata. Questo risultato è analogo a quello ottenuto per il dispositivo di Kelvin-Voight. Al contrario, il periodo del secondo modo dentro la regione del Modo 2a tende al periodo del primo modo della struttura non accoppiata. Il periodo del secondo modo della struttura accoppiata è prossimo al periodo del primo modo della struttura non accoppiata in tutte le regioni caratterizzate dal Modo 2a e nelle regioni caratterizzate dal Modo 2b vicino alla linea di transizione tra le due forme modali. Il terzo modo della struttura accoppiata ha un periodo prossimo a quello del secondo modo della struttura non accoppiata e mostra una sensibilità molto ridotta a  $\rho_e$ . Anche in questo caso, le migliori prestazioni dell'accoppiamento sono attese lì dove il valore del primo periodo è massimo all'interno della regione caratterizzata dal Modo 1a, nel quale lo spostamento dell'esoscheletro è prevalente sullo spostamento della struttura a telaio (Fig. 4.18b).

Una ulteriore analisi mostra la sensibilità della dinamica della struttura accoppiata alla massa virtuale  $m_R$ , parametrizzata attraverso  $\sigma$ . La Fig. 4.20 mostra quattro mappe modali, dove le mappe in ogni colonna si riferiscono a diversi periodi dei primi due modi. Le mappe lungo le righe sono ottenute per diversi valori di  $\sigma$  mentre tutte le mappe sono ottenute per  $\gamma = 10$ . La nomenclatura adottata per le etichette è la stessa di Fig. 4.18. Attraverso un confronto di queste mappe con quelle nella terza riga della Fig. 4.19<sup>3</sup> si osserva che una piccola variazione di  $\sigma$  produce sostanziali cambiamenti nei confini delle regioni che segnano la transizione a diverse forme modali.

Sebbene non è possibile valutare direttamente MPC dei primi due modi, la similarità delle forme modali ottenute dai modelli di accoppiamento di Kelvin-Voight e di Maxwell suggerisce che anche per il Modo 1a di Maxwell il valore di MPC sia molto più alto degli MPC dei restanti modi e che quindi la dinamica della struttura accoppiata sia caratterizzata principalmente dal Modo 1a.

#### 4.3.4 Analisi sismica

Quattro differenti registrazioni sismiche sono utilizzate come forzante esterna. Le registrazioni sono selezionate per tenere in conto le differenze delle loro caratteristiche spettrali. La Fig. 4.21 mostra le storie temporali (a si-

<sup>3</sup>Queste mappe infatti sono state ottenute per lo stesso valore  $\gamma = 10$ .

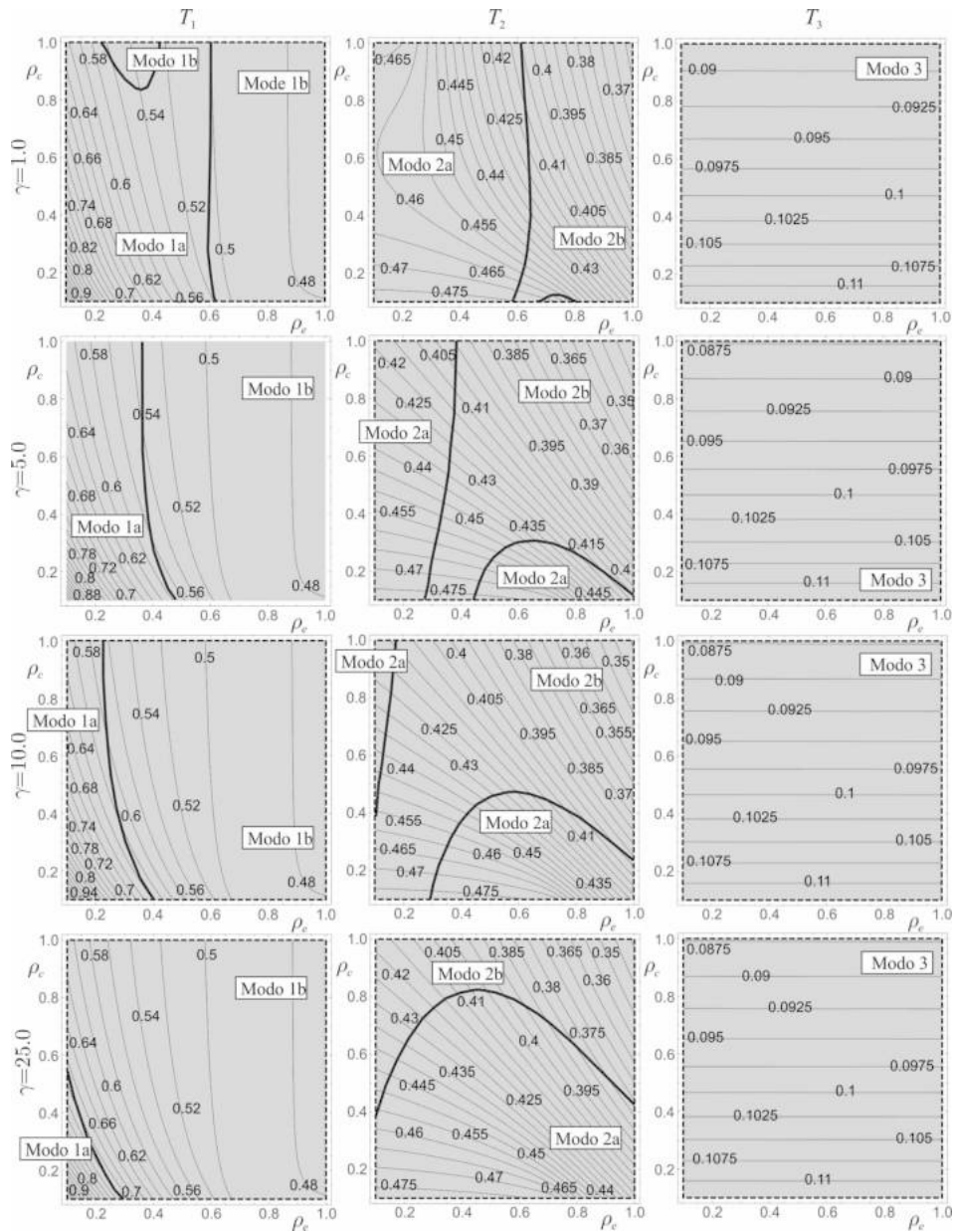
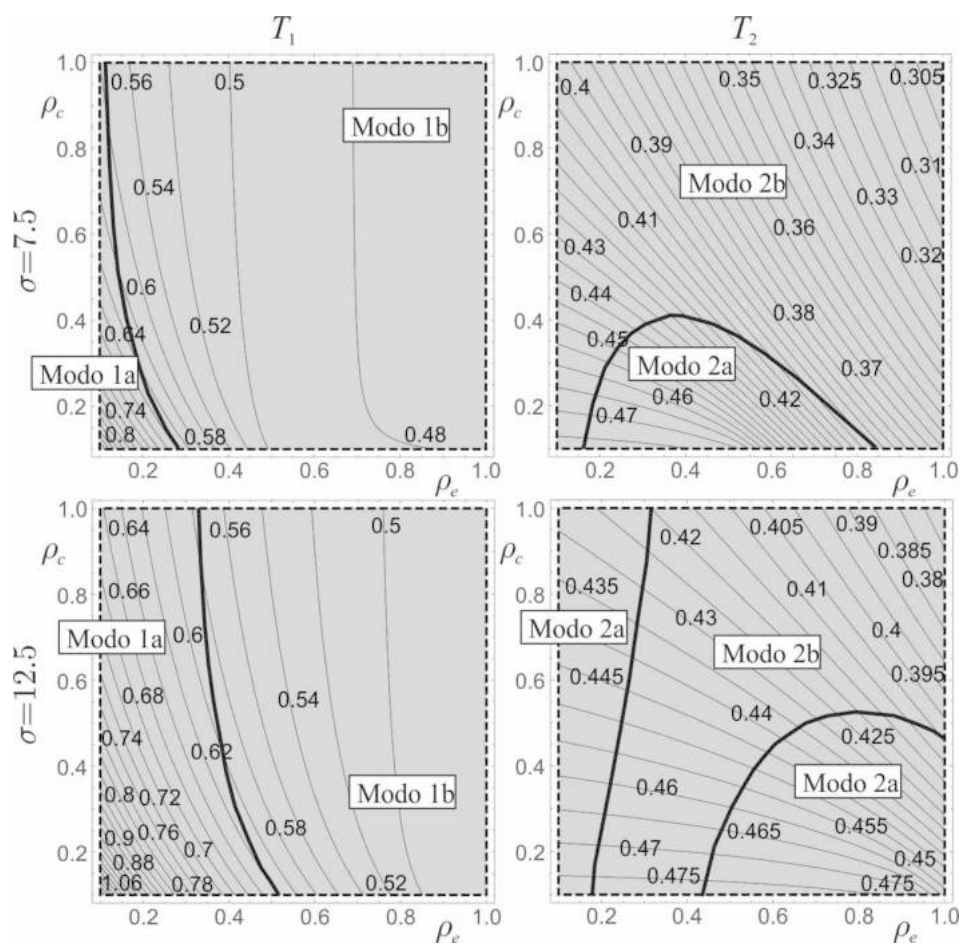


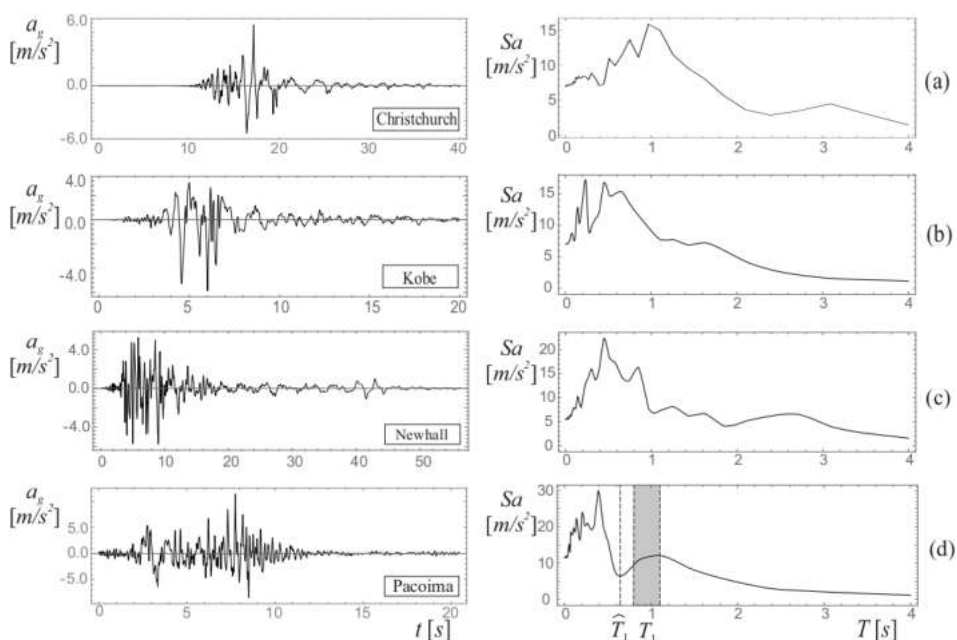
Fig. 4.19: Mappe modali della struttura accoppiata con un dispositivo di Maxwell per differenti valori di  $\gamma$  ( $\sigma = 10$ ).



**Fig. 4.20:** Mappe modali della struttura accoppiata con un dispositivo di Maxwell per differenti valori di  $\sigma$  ( $\gamma = 10$ ).

nistra) e lo spettro di pseudo-accelerazione (a destra) delle registrazioni selezionate che sono:

- (a) Christchurch, REHS ground 2011 ChristChurch New Zeland;
- (b) Kobe, stazione Takarazuka-000, registrato durante il terremoto del Giappone nel 1995;
- (c) Newhall, stazione Newhall-360, registrato nel 1994 durante il terremoto di Northridge, California;
- (d) Pacoima, Dam-164, registrato nel 1971 durante il terremoto di San Fernando, California;



**Fig. 4.21:** Storie temporali e spettri in pseudo-accelerazione delle registrazioni considerate: (a) Christchurch; (b) Kobe; (c) Newhall; (d) Pacoima.

I risultati delle analisi parametriche sono organizzati in mappe che mostrano i coefficienti di guadagno  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  nel piano dei parametri  $\rho_e - \rho_c$ . Ogni mappa si riferisce ad un' unica registrazione e ad una coppia di valori  $\sigma - \gamma$ . Come nei capitoli precedenti, le zone grigio chiaro sono utilizzate per le regioni dove i coefficienti di guadagno sono inferiori all'unità ( $\alpha_1 < 1$  oppure  $\alpha_2 < 1$ , a seconda della mappa considerata). In queste regioni l'accoppiamento è migliorativo per la struttura. Nelle zone grigio scuro invece  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$  sono maggiori dell'unità e l'accoppiamento non migliora, ma può peggiorare la risposta della struttura. Le mappe di guadagno sono ottenute considerando sia un accoppiamento con dispositivo di Kelvin-Voight sia con dispositivo di Maxwell. Nelle analisi si è considerato

un valore costante di  $\sigma$ , infatti sia per il dispositivo di Kelvin-Voight che per il dispositivo di Maxwell si ha  $\sigma = 10$ . Anche il valore di  $\gamma$  è tenuto costante e in particolare  $\gamma = 0.1$  per l'accoppiamento con dispositivo di Kelvin-Voight e  $\gamma = 5$  per l'accoppiamento con dispositivo di Maxwell. Questi due valori di  $\gamma$  sono scelti in maniera tale che la grandezza delle regioni dei Modi 1a sia approssimativamente la stessa (vedere prima riga e colonna a sinistra di Fig. 4.17 e la seconda riga e colonna a sinistra di Fig. 4.19).

La prima analisi si riferisce ad una struttura di quattro piani le cui caratteristiche sono riportate nella prima riga di Tab. 4.3 e Tab. 4.4. La Fig. 4.22 mostra le mappe  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ottenute considerando le registrazioni sismiche di Christchurch e Kobe come eccitazione esterna. Le mappe evidenziano ampie regioni dove l'accoppiamento è efficace. Le mappe  $\alpha_2$  mostrano anche i confini che separano il piano dei parametri nelle due regioni caratterizzate dal Modo 1a e dal Modo 2a (linea spessa puntata, mappe nella colonna a destra). Come anticipato, sebbene i confini dipendono dal tipo di accoppiamento (Maxwell oppure Kelvin-Voight), i valori scelti di  $\gamma$  assicurano che le regioni dove si trovano i Modi 1a hanno dimensioni comparabili.

Dall'analisi delle mappe emerge che la regione del Modo 1a è quella dove i valori di  $\alpha_2$  sono minimi. Per comprendere l'efficacia dell'accoppiamento tra il telaio e la struttura esterna, le storie temporali dei modi indicati da A, B, C e D in Fig. 4.22 sono mostrate in Fig. 4.23. Nello specifico i punti A ( $\rho_e = 0.3, \rho_c = 0.7$ ) e B ( $\rho_e = 0.3, \rho_c = 0.37$ ) si riferiscono ad un dispositivo di accoppiamento di tipo Kelvin-Voight e alla registrazione di Christchurch mentre i punti C ( $\rho_e = 0.3, \rho_c = 0.6$ ) e D ( $\rho_e = 0.5, \rho_c = 0.21$ ) si riferiscono ad un accoppiamento di tipo Maxwell e alla registrazione di Kobe. Per ogni punto, l'efficacia dell'accoppiamento può essere spiegata confrontando le storie temporali di  $u_e$  e quelle di  $u_1$  e  $\Delta u$ . Ad esempio, il punto A è il punto di minimo relativo nella mappa  $\alpha_2$  e di conseguenza i corrispondenti valori di  $\rho_e$  e  $\rho_c$  producono una riduzione di  $\Delta u$ . Osservando le storie temporali nella prima riga di Fig. 4.23,  $u_e$  e  $\Delta u$  sono fuori fase nella prima fase del moto e allo stesso tempo  $u_e$  e  $u_1$  sono in fase. Questi eventi simultanei conducono ad una riduzione del  $\Delta u$  della struttura accoppiata rispetto a quello della struttura non accoppiata. La struttura esterna quindi funziona come una sorta di Tuned Mass Damper per il telaio. Il punto B è un punto di minimo relativo nella mappa  $\alpha_1$ . Pertanto ci si aspetta che i valori corrispondenti di  $\rho_e$  e  $\rho_c$  conducano ad una riduzione di  $u_1$ . Le storie temporali nella seconda riga di Fig. 4.23 mostrano che, nella fase iniziale del moto,  $u_e$  si trova fuori fase sia con  $u_1$  e  $\Delta u$ . Questi eventi spiegano la riduzione di  $u_1$

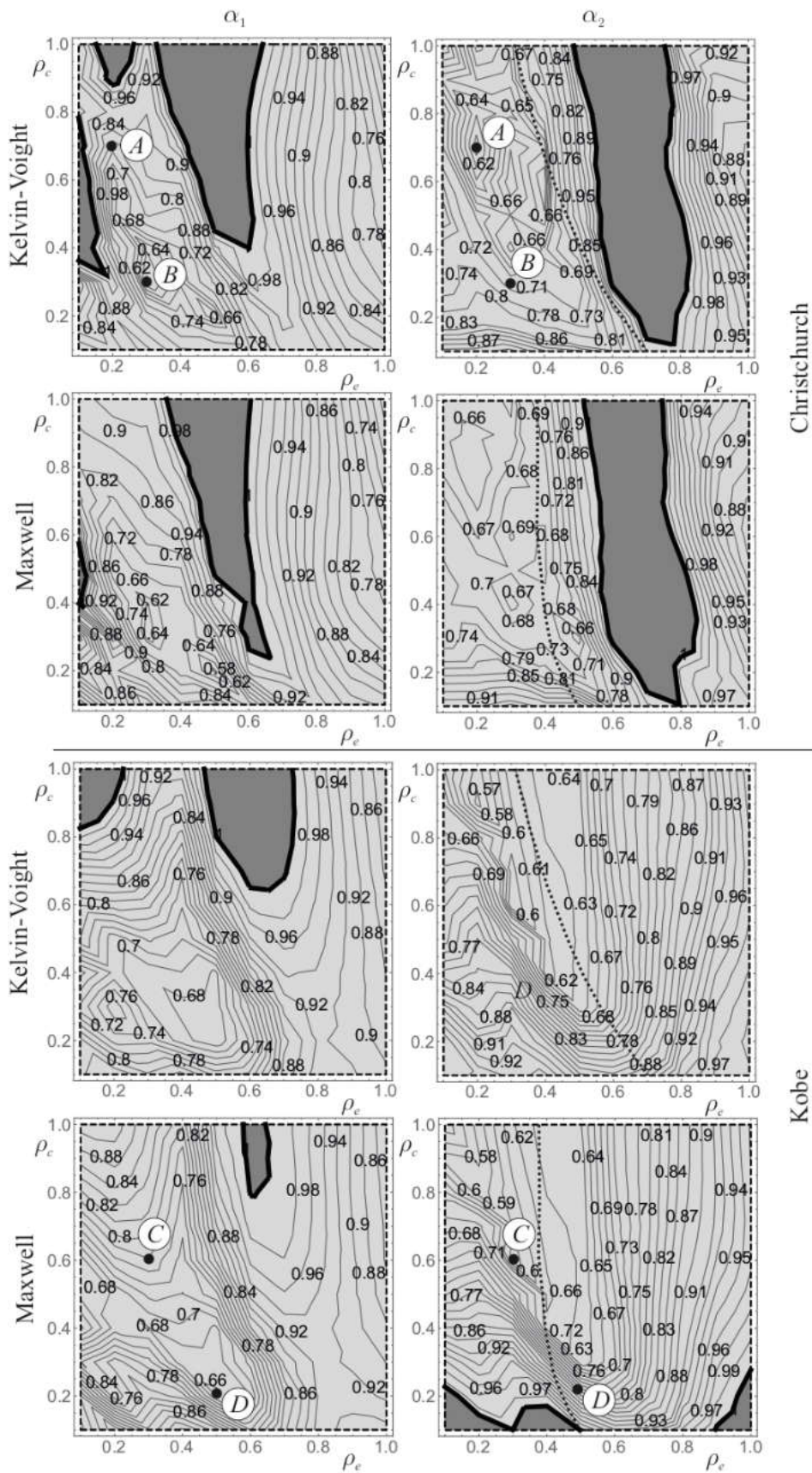
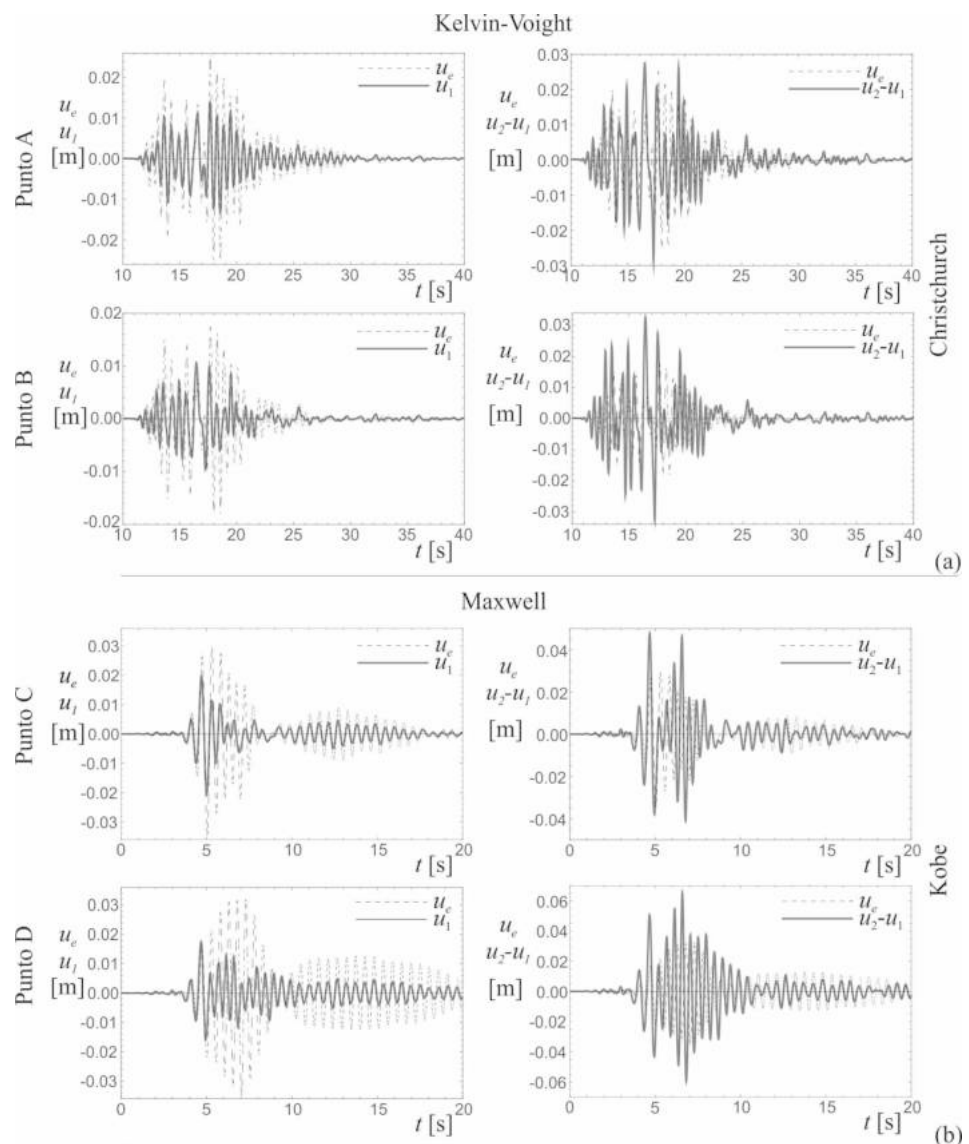


Fig. 4.22: Mappe di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per le registrazioni di Christchurch e Kobe (Kelvin-Voight:  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 0.1$ , Maxwell:  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 5.0$ ).

della struttura accoppiata rispetto a quello della struttura non accoppiata. Il punto C è un punto di minimo relativo per la mappa  $\alpha_2$ . In maniera simile alle storie temporali ottenute per il punto A, le storie temporali nella terza riga di Fig. 4.23 mostrano che  $u_e$  e  $\Delta u$  sono fuori fase mentre  $u_e$  e  $u_1$  sono in fase con una conseguente riduzione di  $\Delta u$  della struttura accoppiata rispetto a quello della struttura non accoppiata. Infine, il punto D è un punto di minimo relativo nella mappa  $\alpha_1$ . Le storie temporali di  $u_e$ ,  $u_1$  e  $\Delta u$  per i corrispondenti valori di  $\rho_e$  e  $\rho_c$  sono mostrate nella quarta riga di Fig. 4.23. In questo caso  $u_e$  si trova fuori fase rispetto sia ad  $u_1$  e a  $\Delta u$ , in maniera simile a quanto accadeva per il punto B.



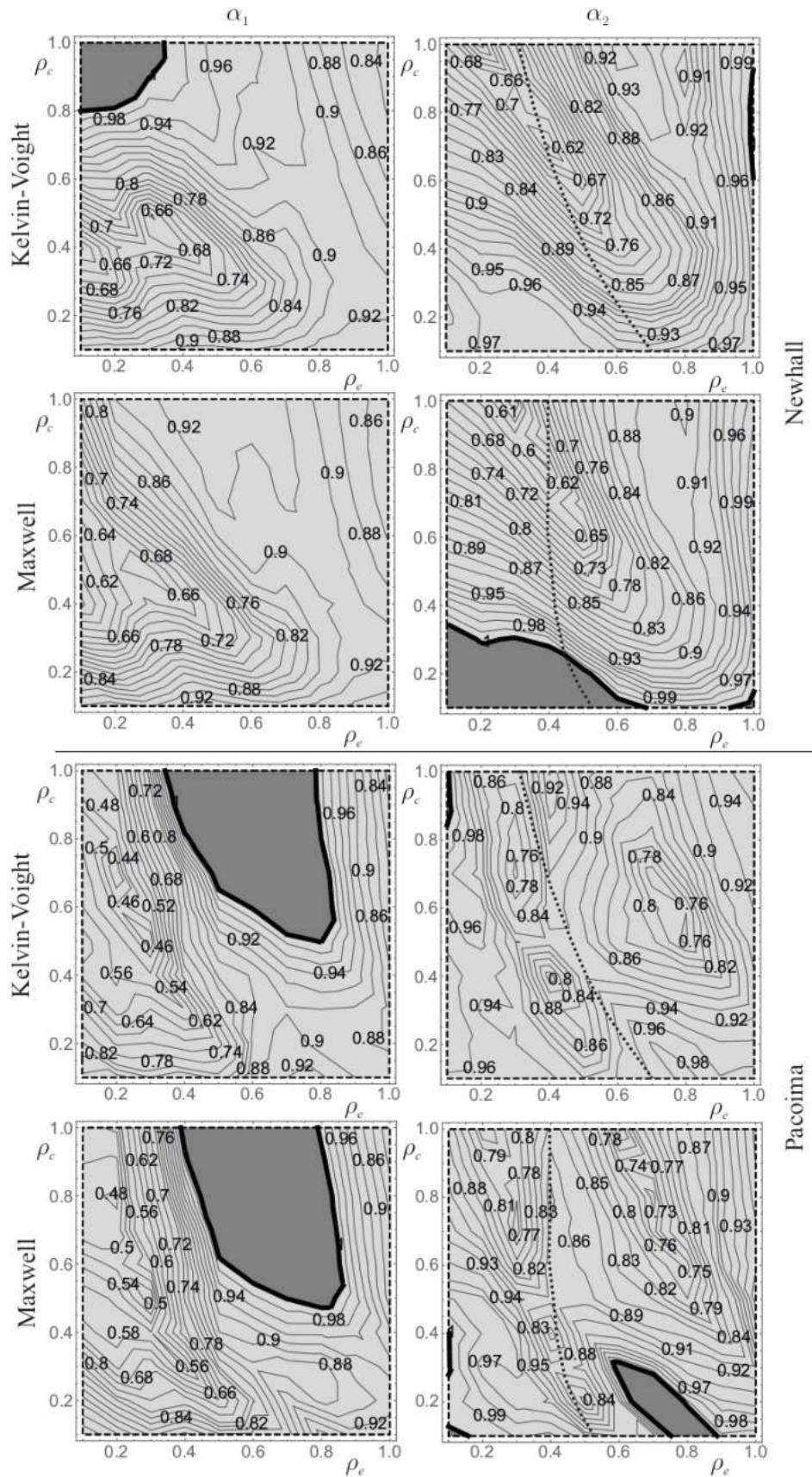
**Fig. 4.23:** Storie temporali di  $u_e$ ,  $u_1$  e  $u_2 - u_1$ : (a) connessione con dispositivo Kelvin-Voigt, registrazione di Christchurch, punto A e B di Fig. 4.22; (b) connessione con dispositivo Maxwell, registrazione di Kobe, punti C e D di Fig. 4.22

La Fig. 4.24 è simile alla Fig. 4.22; essa si riferisce ancora alle analisi ese-

guita sulla struttura di quattro piani e mostra le mappe di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  ottenute utilizzando le registrazioni sismiche di Newhall e Pacoima come eccitazione esterna. Anche in questi casi, le mappe rilevano ampie zone nel piano dei parametri  $\rho_e$  e  $\rho_c$  dove l'accoppiamento è efficace. I valori di  $\alpha_2$  nelle regioni caratterizzate dal Modo 1a sono inferiori rispetto a quelli all'interno delle regioni del Modo 2a. Questo è strettamente vero per la registrazione di Pacoima, mentre la registrazione di Newhall mostra alcuni valori di minimo relativo nelle regioni caratterizzate dal Modo 2a. Questo si verifica per entrambi i tipi di connessione considerati.

L'ultima analisi si riferisce ad una struttura di sei piani, le cui caratteristiche sono riportate nella seconda riga di Tab. 4.3 e Tab 4.4, considerando le quattro diverse registrazioni sismiche come eccitazione esterna. La Fig. 4.25 mostra le mappe  $\alpha_2$  ottenute considerando il dispositivo di accoppiamento di Kelvin-Voight (colonna di sinistra) e il dispositivo di accoppiamento di Maxwell (colonna di destra); ogni riga è riferita ad una diversa registrazione sismica. Anche in questo caso, il valore di  $\sigma = 25$  è costante e uguale per entrambi i tipi di connessione mentre  $\gamma$  dipende dal tipo di connessione utilizzata. Similmente al caso precedente, si sceglie  $\gamma = 0.1$  per il dispositivo di accoppiamento di Kelvin-Voight e  $\gamma = 5$  per il dispositivo di accoppiamento di Maxwell. Tale scelta è fatta in modo tale che le regioni caratterizzate dal Modo 1a abbiano un'estensione simile in tutti e due i tipi di connessione.

Indipendentemente dal dispositivo di accoppiamento, l'accoppiamento è efficace per le registrazioni sismiche di Christchurch, Kobe e Newhall. Per queste tre registrazioni di moto alla base, i punti di minimo relativo sono localizzati nelle stesse regioni dei punti di minimo relativo ottenuti per la struttura di quattro piani. L'accoppiamento non è efficace per la struttura accoppiata di sei piani sotto la registrazione sismica di Pacoima. La ragione può essere individuata osservando lo spettro di risposta in accelerazione della registrazione di Pacoima in Fig. 4.21. Nella figura, la linea verticale tratteggiata si riferisce al primo periodo della struttura non accoppiata  $\hat{T}_1 = 0.659$  s. L'effetto dell'inerter è modificare il primo modo della struttura incrementando il suo periodo  $T_1$  e modificando la forma modale cosicché gli spostamenti dell'esoscheletro prevalgano su quelli della struttura. Un ulteriore effetto è dato dall'incremento di MPC, che sale a valori vicini al 90%. Solitamente, l'incremento del periodo del primo modo della struttura incrementa le sue prestazioni sismiche poiché la potenza spettrale dei terremoti generalmente diminuisce all'aumentare del periodo. Invece la registrazione di Pacoima fa eccezione, in quanto la potenza spettrale in  $T_1$



**Fig. 4.24:** Mappe di  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  per le registrazioni di Newhall e Pacoima (struttura a quattro piani, connessione di tipo Kelvin-Voigt:  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 0.1$ , connessione di tipo Maxwell:  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 5.0$ ).

è maggiore rispetto a quella ottenuta in  $\hat{T}_1$ . Differentemente, la struttura di quattro piani ha il periodo del primo modo della struttura non accoppiata pari a  $\hat{T}_1 = 0.484$  s che corrisponde ad un alto valore di potenza spettrale e quando tale periodo, per effetto dell'inerter, aumenta a  $T_1$  esso si sposta verso valori dello spettro a potenza spettrale inferiore con il conseguente miglioramento della risposta sismica della struttura accoppiata.

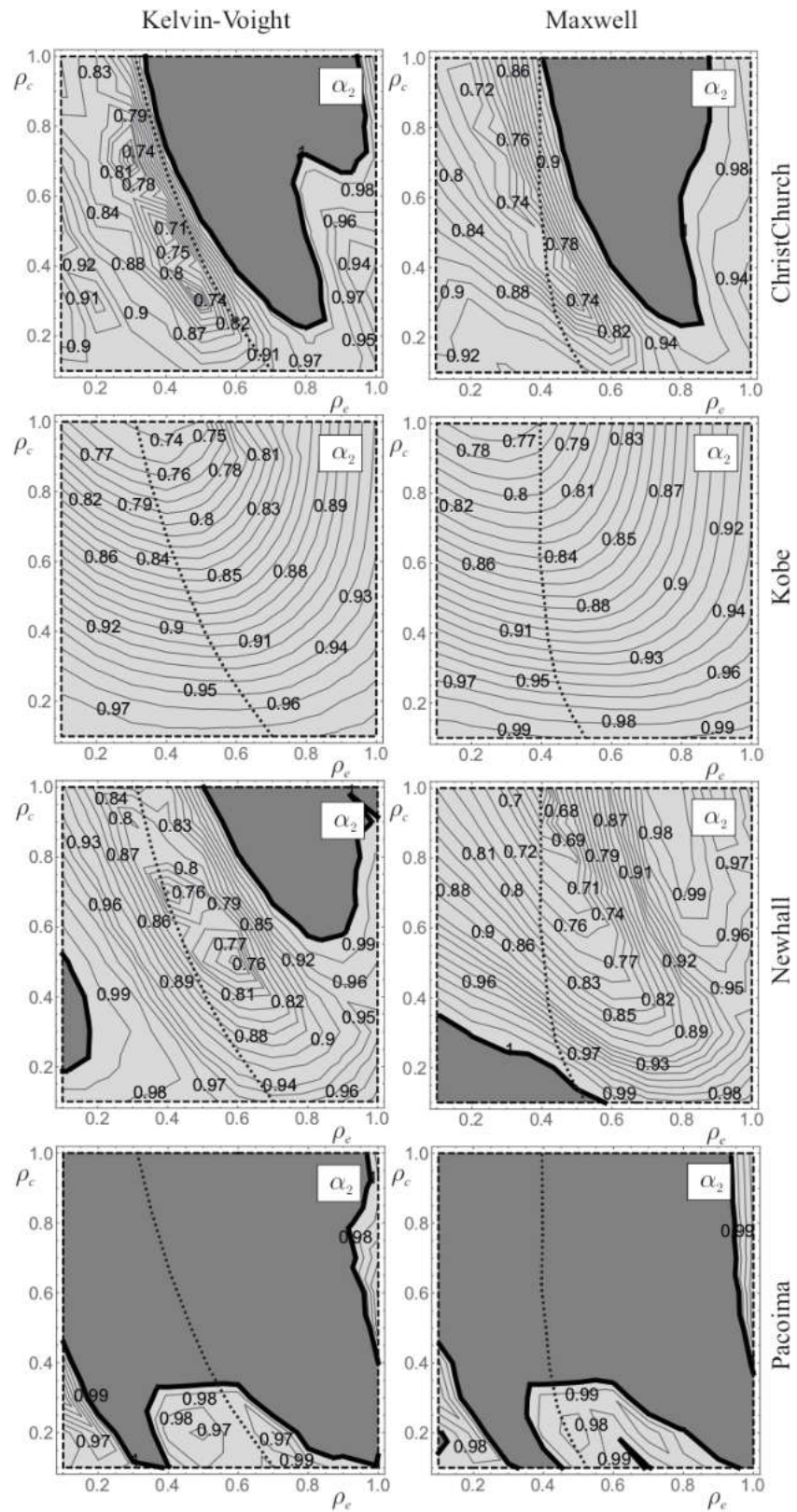
Infine, il confronto delle mappe ottenute mostra che l'utilizzo di dispositivo di Kelvin-Voight e Maxwell conduce a comportamenti dinamici comparabili. La similarità delle prestazioni dinamiche della struttura accoppiata connessa con due differenti tipologie di dispositivo conferma che l'estensione dell'area caratterizzata dal Modo 1a è un parametro idoneo per confrontare l'efficacia dei due dispositivi di accoppiamento.

### **4.3.5 Conclusioni**

In questo capitolo una struttura a telaio multi piano, modellata con un modello archetipo a due gradi libertà, viene accoppiata ad un esoscheletro esterno, modellato attraverso un unico grado di libertà, per migliorarne la risposta dinamica. L'esoscheletro, che ha dimensioni inferiori rispetto alla struttura, viene connesso al primo piano del telaio. La connessione può essere realizzata con due tipologie differenti di dispositivi: uno descritto dalla legge costitutiva di Kelvin-Voight mentre l'altro è descritto dalla legge costitutiva di Maxwell. Inoltre, un dispositivo inerter è applicato sulla struttura esterna per modificare la sua forza di inerzia. La struttura accoppiata è descritta da un sistema meccanico lineare a tre gradi di libertà, le cui equazioni sono ottenute con un approccio diretto. L'accoppiamento tra la struttura e l'esoscheletro è considerato vantaggioso quando si ha una riduzione degli spostamenti e dei drift della struttura accoppiata rispetto a quella non accoppiata.

Un'analisi modale preliminare è utilizzata per comprendere gli effetti dell'accoppiamento con l'esoscheletro e del dispositivo inerter. Le analisi tengono anche conto delle condizioni per le quali i dispositivi di Kelvin-Voight e Maxwell conducono a comportamenti simili della struttura accoppiata.

Nell'analisi sismica si considerano quattro diverse registrazioni sismiche i cui risultati sono organizzati in mappe di guadagno. Ogni mappa è realizzata variando la rigidezza dell'esoscheletro e del dispositivo di accoppiamento. Si osserva che ci sono ampie regioni nel piano dei parametri dove l'accoppiamento è vantaggioso per la struttura. In corrisponden-



**Fig. 4.25:** Mappe di  $\alpha_2$  per le registrazioni Christchurch, Kobe, Newhall e Pacoima (struttura a sei piani, connessione di Kelvin-Voight:  $\sigma = 25$ ,  $\gamma = 0.1$ , connessione di Maxwell:  $\sigma = 25$ ,  $\gamma = 5.0$ ).

za dei punti delle mappe dove la riduzione degli spostamenti è massima, la struttura esterna si muove in contro fase rispetto al moto del piano di accoppiamento della struttura. In questi punti i valori di rigidezza di accoppiamento e dell'esoscheletro sono tali che l'accoppiamento ha un effetto simile ad un Tuned Mass Damper.



# CONCLUSIONI

In questa tesi si è studiato l'accoppiamento di una struttura a telaio con altri elementi strutturali al fine di migliorare la risposta dinamica e sismica del telaio stesso. Come si è visto, l'elemento strutturale può essere sia interno che esterno. Infatti nel caso della discontinuità, tale accoppiamento viene realizzato tra gli elementi che compongono il telaio stesso. Infatti l'improvvisa variazione di rigidezza accoppia le risposte della sottostruttura e della sovrastruttura in modo tale da avere un miglioramento globale della risposta su tutti e due gli elementi. Nel caso di accoppiamento con elementi esterni essi possono essere sia di tipologie strutturali differenti, come il blocco rigido, sia elementi strutturali simili, come l'esoscheletro. In quest'ultimo caso il miglioramento che si ottiene può essere di due differenti tipologie: dissipativo o puramente dinamico. In tutti i sistemi analizzati l'accoppiamento riguarda solo piccole porzioni di struttura, in modo tale l'impatto visivo dell'intervento sia modesto. Per ognuna delle tecniche di protezione si sono ottenute delle mappe di predimensionamento che hanno messo in luce un significativo miglioramento della risposta dinamica per ognuna delle tecniche di protezione studiate se sono scelti gli opportuni parametri progettuali.

## Discontinuità

La discontinuità o anche isolamento a piano intermedio rappresenta un'improvvisa variazione di rigidezza all'interno della struttura. In questa tesi, il suo studio è stato articolato in tre parti:

- Studio del comportamento qualitativo del sistema effettuato attraverso analisi modali per l'interpretazione del comportamento dina-

mico del sistema nonché valutazione della risposta dinamica del sistema sotto forzante armonica e comparazione dei risultati ottenuti rispetto allo stesso sistema senza discontinuità;

- Studio della risposta sismica del sistema, con particolare attenzione agli aspetti dissipativi nonché all'applicazione del sistema a telai spaziali;
- Analisi delle non linearità del sistema, con particolare attenzione sia al comportamento qualitativo del modello non lineare sia alla risposta sismica dello stesso.

Lo studio è stato svolto attraverso l'ausilio di modelli ridotti 3-GDL. Una parte consistente dello studio è rivolta alla validazione del modello archetipo ovvero alla sua capacità di descrivere sia telai piani che spaziali. Si trova che la capacità del modello archetipo di descrivere sia telai piani che spaziali dipende dalla regolarità del telaio stesso. Se infatti la risposta del telaio è descrivibile con sufficiente accuratezza da un unico modo, allora il modello archetipo è in grado di rappresentare il telaio con lo stesso grado di accuratezza.

La prima parte dello studio sostanzialmente estende i lavori [5, 6] passando da un modello 2-GDL ad un modello 3-GDL. Infatti quest'ultimo consente di tenere in conto sia la dinamica della sottostruttura che della sovrastruttura. Le prestazioni della discontinuità vengono individuate attraverso tre coefficienti di guadagno che descrivono la tripla capacità della discontinuità di migliorare la risposta dinamica di questa strategia di protezione. Infatti il primo coefficiente misura la riduzione (o l'incremento) dello spostamento della sottostruttura, il secondo misura la riduzione (o l'incremento) dello spostamento della sovrastruttura mentre l'ultimo misura lo spostamento della discontinuità e la capacità filtrante della sottostruttura. I risultati delle analisi armoniche sono poi riassunti in mappe di guadagno che mostrano i coefficienti di guadagno nel piano dei parametri. I parametri sono le principali grandezze di progetto della discontinuità, ovvero piano di discontinuità e rigidità della discontinuità. Le mappe mostrano che, scegliendo opportunamente i parametri di progetto, la discontinuità è in grado di ridurre gli spostamenti sia nella sottostruttura che nella sovrastruttura. Un'analisi modale viene poi effettuata per comprendere il funzionamento dinamico del sistema. Si trova che quando il coefficiente  $\alpha_1$  è minimo, vi è una perfetta sintonizzazione tra la sovrastruttura e la sottostruttura ovvero la sovrastruttura agisce da Tuned Mass Damper per la sottostruttura. Al contrario, la ragione dietro i minimi di  $\alpha_2$  è da ricercare

nel comportamento a Base Isolata del sistema. Infatti, la sovrastruttura si comporta come fossa isolata alla base. Infine il coefficiente  $\alpha_3$  indica la capacità filtrante della sottostruttura, e in generale diminuisce quando la discontinuità si trova ai piani superiori.

Nella seconda parte si investigano in dettaglio gli effetti della irregolarità sulla risposta sismica del sistema disconnesso. Infatti su strutture non perfettamente regolari, ovvero dove vi è una debole eccentricità tra il centro di massa e il centro di rigidezza del telaio, esistono molteplici configurazioni dei dispositivi di isolamento. Infatti essi possono essere disposti in maniera tale che il loro centro di rigidezza coincida con il centro di massa o con il centro di rigidezza del telaio. Attraverso l'ausilio di un modello spaziale a  $3 \times N$ -GDL, si studiano queste due differenti configurazioni del piano di discontinuità. I risultati mostrano che in generale, per bassi valori della rigidezza di disconnessione, se il centro di rigidezza del piano di isolamento coincide con il centro di rigidezza del telaio gli spostamenti risultanti sono inferiori. In seguito la risposta sismica del sistema viene studiata attraverso l'utilizzo del modello archetipo e di mappe spettro-compatibili. Tali mappe non sono riferite ad una singolare registrazione sismica, ma ad uno spettro di progetto. Poiché le normative generalmente forniscono uno spettro di progetto, tali mappe possono essere un utile strumento di predimensionamento del sistema. Le mappe inoltre evidenziano significative diminuzioni degli spostamenti del telaio sia a livello di sottostruttura che di sovrastruttura. Tuttavia le prestazioni della discontinuità diminuiscono quando l'irregolarità del telaio aumenta.

Nella terza parte si indaga la risposta sismica del sistema non lineare. Infatti in quest'ultima analisi la discontinuità viene modellata attraverso il legame non lineare Bouc-Wen. La risposta armonica del sistema viene utilizzata per descrivere il comportamento qualitativo del sistema e in particolare l'influenza dell'ampiezza  $A$  dell'eccitazione esterna, il rapporto tra rigidezza elastica e plastica  $\Psi$  e lo spostamento di snervamento  $u_y$  sulla risposta. Si osserva che un incremento di  $A$  o una diminuzione di  $\Psi$  aumentano il comportamento plastico del sistema. Si osserva infatti che le funzioni di risposta in frequenza modificano la loro forma, infatti passano da funzioni con un singolo picco a funzioni con due picchi di altezza inferiore. Lo spostamento  $u_y$  influisce sulla "facilità" del sistema di entrare in campo plastico, consentendo di modificare il valore dell'ampiezza che produce l'ingresso in campo plastico del sistema. Infine si è analizzata la risposta sismica del sistema. A questo scopo, sono state considerate numerose registrazioni sismiche tali da consentire un coefficiente di variazio-

ne  $CoV < 0.2$ . Lo spostamento considerato viene quindi dato dalla media degli spostamenti ottenuti e i relativi coefficienti di guadagno sono riferiti a questi spostamenti medi. I risultati delle analisi sismiche sono riportati in mappe di guadagno che mostrano i coefficienti di guadagno in uno specifico piano dei parametri. I parametri scelti sono la PGA (Peak Ground Acceleration) e la rigidità elastica della discontinuità. Le mappe sono quindi ottenute per diversi valori di  $\Psi$ . Si osserva che la capacità della sovrastruttura di funzionare come TMD diminuisce quando il piano di connessione si trova nei piani superiori. Questo può essere dovuto al diverso rapporto di massa tra la massa della sovrastruttura, che agisce come TMD, e della sottostruttura che si vuole proteggere. Infatti quando la discontinuità si sposta verso i piani superiori, tale rapporto diminuisce. Nel caso di funzionamento a Base Isolata, il comportamento è esattamente l'opposto. Infatti quando il piano di disconnessione si sposta ai piani superiori, la rigidità della sovrastruttura aumenta e si è più vicini allo schema classico di base isolata, risultante quindi in prestazioni più elevate. Inoltre si osserva che nelle mappe  $\alpha_3$ , le quali misurano il rapporto tra lo spostamento del piano di discontinuità e lo spostamento massimo ammissibile, le zone grigio scuro sono minime. Pertanto la discontinuità mostra spostamenti ammissibili in quasi la totalità della mappa. Infine si osserva che, quando la plasticità si riduce, la zona grigio scuro nella mappa  $\alpha_1$  si riduce e gli spostamenti del piano di discontinuità aumentano.

## **Accoppiamento di un blocco rigido e di una struttura intelaiata**

L'accoppiamento di un blocco rigido e di una struttura a telaio rappresenta l'accoppiamento tra due tipologie strutturali differenti. Lo scopo è quello di sfruttare alcune specifiche capacità del blocco per ridurre gli spostamenti del telaio a cui viene accoppiato. Le analisi sono svolte attraverso un modello archetipo a 3-GDL, dove 2-GDL sono riferiti al telaio e il terzo al blocco rigido. La struttura è accoppiata al blocco attraverso un organo visco-elastico (CD). Può essere presente anche un secondo collegamento tra il blocco e il terreno (ED). Lo studio è articolato in tre parti:

- Studio del comportamento qualitativo del sistema accoppiato attraverso analisi modali al fine di comprendere il funzionamento meccanico del sistema nonché valutazione della risposta dinamica

del sistema accoppiato sotto forzante armonica per verificare se è in grado, per determinate frequenze, di ridurre gli spostamenti del telaio;

- Analisi del sistema accoppiato per verificare se il sistema accoppiato è in grado di ridurre gli spostamenti del telaio quando sottoposto a registrazioni sismiche nonché analisi modale per correlare i risultati ottenuti agli spettri delle registrazioni sismiche utilizzate;
- Analisi sismica del sistema accoppiato con inerter e redazione di mappe spettro-compatibili riferite ad uno specifico spettro di progetto, utili al predimensionamento della strategia di protezione.

Nella prima parte dello studio le analisi hanno fornito due tipologie di comportamento differente a seconda se vi è solo accoppiamento con il blocco (CD) o anche il collegamento tra blocco e terreno (ED). Nel caso di solo accoppiamento tra blocco e telaio (CD) si ottengono i seguenti risultati:

- l'efficienza dell'accoppiamento tra blocco e telaio è più elevata quando il blocco ha una base sufficientemente alta.
- Un valore più elevato della base  $2b$  richiede una rigidità maggiore del dispositivo di accoppiamento; comunque il rapporto di rigidità  $\beta$  che assicura una buona risposta del sistema accoppiato resta sempre comunque sufficientemente piccolo ( $\beta < 0.09$ );
- Dalle analisi si deduce che l'accoppiamento raggiunge buone prestazioni quando la frequenza dell'eccitazione armonica è prossima a quella del modo di vibrazione in cui il blocco e il piano del telaio ad esso connesso si muovono in contro-fase, così assicurando un funzionamento simile al "Tuned Mass Damper" per la parete. Poiché la frequenza di tale modo è in generale più alta del primo modo del telaio non accoppiato, la presenza del blocco assicura effetti migliorativi per frequenze dell'eccitazione armonica più elevate delle frequenze del telaio non accoppiato.

Qualora sia presente anche il dispositivo esterno di collegamento tra blocco e terreno (ED) si ha che:

- Per tutte le lunghezze della base  $2b$  considerate, sono necessari valori molto alti delle rigidità  $k_C$  e  $k_E$  per assicurare buone prestazioni al sistema accoppiato;

- Dalle analisi si deduce che l'accoppiamento ha buone prestazioni quando la frequenza dell'eccitazione armonica è prossima o più piccola della prima frequenza del telaio non accoppiato; contrariamente al caso precedente, qui l'accoppiamento assicura effetti migliorativi per valori dell'eccitazione armonica più piccoli di quelli della prima frequenza del telaio disaccoppiato.

Considerando l'intervallo di frequenze interessato dalle azioni sismiche, nella seconda parte dello studio si è considerato solamente CD. Due differenti tipologie di edifici sono considerati. Nel caso di edifici di piccole dimensioni, l'accoppiamento può essere realizzato a livello del primo piano del telaio. Nel caso di edifici di dimensioni maggiori può essere necessario spostare l'accoppiamento a livello del secondo piano. In entrambi i casi si riscontrano riduzioni non trascurabili negli spostamenti del telaio. Inoltre, per migliorare le prestazioni del blocco senza alterarne in maniera significativa le dimensioni, si è posta una massa concentrata sulla testa del blocco. Il ruolo della massa aggiunta è quello di aumentare il periodo del primo modo del sistema accoppiato. Infatti nel primo modo il blocco e il telaio si muovono in fase e aumentandone il periodo, esso si sposta in zone dove, generalmente, lo spettro del terremoto ha potenze inferiori. Le mappe di guadagno ottenute utilizzando una massa aggiunta risultano avere zone di guadagno più ampie e coefficienti  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  inferiori. Si osserva infine che il rapporto tra la massa del blocco e quello della struttura da proteggere varia tra il 10% e il 30%.

Nella terza parte, si vuole ridurre il rapporto tra massa del blocco e quello della struttura attraverso l'ausilio di dispositivi inerter. Gli inerter sono applicati sia sulla struttura attraverso uno chevron rigido ( $ID_S$ ) sia come connessione tra blocco e terreno ( $ID_B$ ). Attraverso analisi sismiche svolte su molteplici registrazioni, si trova che gli  $ID_S$  risultano sempre dannosi per la risposta dinamica, ovvero incrementano gli spostamenti del telaio. Al contrario gli  $ID_B$  forniscono importanti miglioramenti alla risposta dinamica del sistema accoppiato. Questo si verifica perché l'inerter consente, attraverso la sua massa apparente, di fornire ulteriore inerzia al blocco. Le storie temporali ottenute nonché le analisi modali svolte confermano il funzionamento del blocco come una sorta di Tuned Mass Damper laddove i parametri sono scelti in corrispondenza dei punti di minimo delle mappe. Infatti una volta che il blocco inizia a oscillare in contro-fase, esso è capace di proseguire questo movimento in contro-fase anche quando le caratteristiche del moto cambiano nel tempo, in quanto il blocco può mantenere la

sintonizzazione modificando opportunamente l'ampiezza di oscillazione. Poiché le norme tecniche forniscono spettri di progetto e non registrazioni sismiche, le mappe di guadagno, sebbene utili alla comprensione del comportamento meccanico del sistema accoppiato, non possono essere utilizzate nella fase di predimensionamento dell'accoppiamento. Allora sono state costruite le mappe di guadagno spettro-compatibili dopo aver verificato la proprietà di spettro-compatibilità per il sistema accoppiato. Infatti poiché il sistema è non lineare, la spettro-compatibilità non è garantita. Tuttavia poiché le rotazioni del blocco restano piccole e sufficientemente lontane dall'angolo critico, la sua risposta è vicina a quella lineare. Le mappe spettro-compatibili possono essere un utile strumento di ausilio per il predimensionamento di questa tecnica di protezione.

Infine, si è effettuata una validazione sperimentale del modello analitico. Tale validazione è stata eseguita sia con analisi armoniche che analisi sismiche sul sistema analitico e sperimentale. I risultati delle analisi armoniche mostrano una buona corrispondenza tra modello sperimentale e analitico all'interno delle regioni di guadagno. All'esterno di tali regioni si osserva una differenza tra il periodo del secondo modo linearizzato e quello del sistema sperimentale. Ciò è imputabile ad alcune imperfezioni del sistema, quali la non perfetta planarità della base su cui poggia il blocco e la non perfetta simmetria del blocco stesso. Tuttavia tale differenza influenza solamente i risultati all'esterno delle zone di guadagno. Questo comportamento è verificato dalle analisi sismiche. Infatti in queste analisi, svolte su due diverse registrazioni, il sistema accoppiato agisce sempre all'interno delle zone di guadagno e pertanto si ha un buon riscontro tra le curve sismiche analitiche e quelle sperimentali. Infine i risultati analitici ottenuti per altre registrazioni sismiche hanno mostrato la capacità del blocco di mitigare gli spostamenti del telaio anche per differenti tipi di eccitazione esterna.

## **Accoppiamento di un esoscheletro e di una struttura intelaiata**

Differentemente dalla sezione precedente, qui l'accoppiamento avviene tra tipologie strutturali simili, ovvero dal telaio che si vuole proteggere e da un esoscheletro esterno. Lo studio è articolato in due parti che studia due tipologie differenti di accoppiamento tra telaio ed esoscheletro:

- La prima riguarda un accoppiamento rigido tra il telaio da proteg-

gere e un esoscheletro elasto-plastico. Lo scopo principale di questo accoppiamento è quello di incrementare la capacità dissipativa del sistema accoppiato.

- La seconda tipologia riguarda un accoppiamento visco-elastico tra il telaio da proteggere e l'esoscheletro elasto-plastico. Lo scopo principale di questo sistema è di ridurre gli spostamenti del telaio sfruttando le proprietà dinamiche del sistema accoppiato.

Nella prima tipologia, l'accoppiamento rigido tra telaio ed esoscheletro è modellato con un sistema archetipo 2-GDL. Le analisi armoniche evidenziano che l'accoppiamento è in grado di mitigare in maniera sostanziale lo spostamento della sottostruttura e quello della sovrastruttura, seppure in maniera ridotta. L'osservazione dei cicli di isteresi nei punti di minimo mostra una significativa dissipazione di energia dovuta alla deformazione plastica dell'esoscheletro. Le curve di risposta in frequenza nei punti di minimo mostrano che l'accoppiamento causa uno spostamento della frequenza principale del sistema accoppiato nonché una riduzione della risposta, sia a livello di sottostruttura che sovrastruttura. Le analisi sismiche sono effettuate sia su un telaio a tre piani che su un telaio a sei piani. Nel caso di telaio a tre piani, la connessione tra telaio ed esoscheletro è realizzato al primo piano e si riscontrano riduzioni superiori al 30% dovute principalmente agli ampi cicli di isteresi dell'esoscheletro. Nel caso di struttura a sei piani, l'accoppiamento al primo piano conduce ad un esoscheletro troppo piccolo rispetto al telaio e a riduzioni di spostamento della sovrastruttura alquanto modeste. Pertanto nel caso di edifici di dimensioni maggiori, quali il telaio a sei piano, è necessario collegare esoscheletro e telaio al secondo piano.

Nella seconda tipologia l'accoppiamento tra telaio ed esoscheletro è realizzato con un dispositivo visco-elastico. Due differenti modelli del dispositivo sono considerati: i) modello di Kelvin-Voight e ii) modello di Maxwell. Il sistema accoppiato è modellato con 3-GDL, due relativi al telaio e uno all'esoscheletro il cui legame è elastico lineare. Inoltre un dispositivo inerter è collegato all'esoscheletro. Per l'analisi modale, le equazioni sono scritte nello spazio di stato e gli autovalori assumono valori complessi e coniugati. Nel caso di dispositivo di accoppiamento Kelvin-Voight, si osserva che la prima forma modale dipende notevolmente dalla massa totale dell'esoscheletro. Poiché le dimensioni dell'esoscheletro sono fisse, il passaggio dalla forma modale 1a alla forma modale 1b è influenzato dalla massa virtuale dell'inerter. Inoltre gli inerter consentono anche di au-

mentare il valore di massa partecipante relativa al Modo 1a. Anche nel caso di dispositivo di Maxwell si può ritrovare la forma modale 1a, dove lo spostamento dell'esoscheletro è prevalente sullo spostamento del telaio, utilizzando un valore sufficientemente alto di inerzia. I risultati di una campagna parametrica di analisi condotte sotto eccitazione sismica sono organizzati in mappe. Le mappe mostrano i coefficienti di guadagno in funzione dei parametri di progettuali, ovvero la rigidità del dispositivo di accoppiamento e quella dell'esoscheletro. Le mappe mostrano ampie zone dove l'accoppiamento con l'esoscheletro può ridurre gli spostamenti di sottostruttura e sovrastruttura per differenti registrazioni sismiche. L'utilizzo di inerter connessi all'esoscheletro ha principalmente due effetti: da una parte si ha un incremento del periodo della prima formale. dall'altra si ha il passaggio ad una forma modale dove gli spostamenti dell'esoscheletro sono prevalenti rispetto a quelli del telaio.



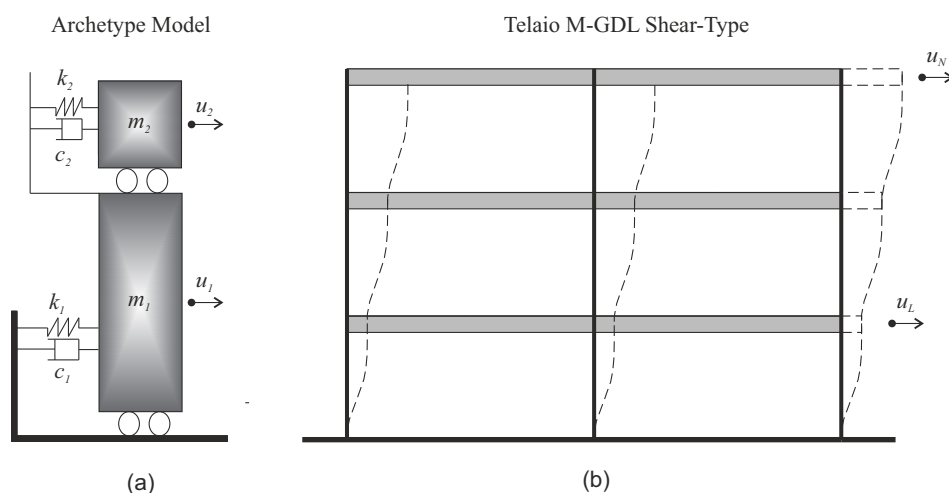
# APPENDICI



# APPENDICE A

## A.1 Equivalenza dinamica tra modelli M-GDL e modelli archetipi

Nella seguente Appendice viene riportata la procedura di equivalenza che permette di determinare le caratteristiche meccaniche di un modello archetipo in modo tale che risulti dinamicamente equivalente ad un modello M-GDL. Tale procedura è un'estensione per telai spaziali della procedura descritta in [6]. Poichè il modello equivalente archetipo è a due gradi di libertà, allora esso vuole descrivere correttamente gli spostamenti del telaio in due punti: al piano  $L$ -simo e al piano  $N$ -simo (Fig. A.1).



**Fig. A.1:** (a) Modello archetipo e (b) Telaio M-GDL shear-type

Le ipotesi alla base sono:

- La frequenza  $\omega_m$  del modo fondamentale del telaio M-GDL e la frequenza del primo modo del modello archetipo sono uguali.

- Gli spostamenti modali dei piani  $L$ -simo e  $N$ -simo del telaio M-GDL sono uguali agli spostamenti modali  $u_1$  e  $u_2$  del modello archetipo.

Il primo passo della procedura consiste nell'identificare il modo fondamentale del telaio M-DOF (Fig. A.1b). Si assume che il modo fondamentale della struttura sia quello con il valore più elevato del fattore di partecipazione  $\mathcal{L}_m$  associata al modo. Il vettore che rappresenta il modo fondamentale è  $\phi_m$  il quale contiene tutti gli spostamenti modali del telaio M-GDL lungo un allineamento verticale. Tale allineamento può trovarsi in qualsiasi punto della struttura, incluso ma non limitato al baricentro della struttura o a una colonna perimetrale. Se l'allineamento si trova lungo una colonna, allora le componenti di  $\phi_m$  rappresentano gli spostamenti modali di ciascuna colonna ad ogni piano.

$$\Phi_m = \{\phi_{1x}, \phi_{1y}, \phi_{1\theta}, \dots, \phi_{Lx}, \phi_{Ly}, \phi_{L\theta}, \dots, \phi_{Nx}, \phi_{Ny}, \phi_{N\theta}\}^T \quad (\text{A.1})$$

dove i termini  $\phi_{ix}$  e  $\phi_{iy}$ , ( $i = 1, \dots, N$ ) rappresentano gli spostamenti modali nelle direzioni  $x$  e  $y$  del  $i$ -simo piano lungo uno specifico allineamento. I termini  $\phi_{i\theta}$  rappresentano la rotazione dell'  $i$ -simo piano.

Le seguenti relazioni per le masse equivalenti  $m_1$  e  $m_2$  e le rigidezze  $k_1$  e  $k_2$  del modello archetipo (Fig. A.1a) possono essere ottenute come in [6]:

$$m_1 = m_p \times L; \quad m_2 = m_p \times (np - L); \quad (\text{A.2})$$

$$k_1 = \frac{\omega_m^2 (m_1 \bar{\phi}_1 + m_2 \bar{\phi}_2)}{\bar{\phi}_1}; \quad k_2 = \frac{\omega_m^2 m_2 \bar{\phi}_2}{\bar{\phi}_2 - \bar{\phi}_1} \quad (\text{A.3})$$

dove  $\bar{\phi}_1 = \phi_{Lj}$  e  $\bar{\phi}_2 = \phi_{Nj}$ , ( $j = x, y$ ) sono le componenti del vettore  $\Phi_m$  che si riferiscono al piano  $L$ -simo e al piano  $N$ -simo del telaio M-DOF. La scelta della componente lungo la direzione  $x$  o  $y$  dipende dalle caratteristiche del modo scelto. Per esempio, se il modo prevalente è lungo la direzione  $x$ ,  $\bar{\phi}_1$  e  $\bar{\phi}_2$  sono le componenti modali  $\bar{\phi}_1 = \phi_{Lx}$  e  $\bar{\phi}_2 = \phi_{Nx}$ .

## A.2 Registrazioni sismiche spettro-compatibili

Nelle tabelle seguenti sono riportate le liste di registrazioni spettro-compatibili agli spettri di l'Aquila (Set 1 e Set 2) e di Los Angeles.

**MODELLI E ANALISI DI SISTEMI ACCOPPIATI PER IL MIGLIORAMENTO DINAMICO E SISMICO DI  
STRUTTURE INTELAIATE**

**Tabella A.1:** Set 1 di registrazioni compatibili con lo spettro di progetto di L'Aquila (Italy), in accordo ai criteri di spettro-compatibilità previsti dalle NTC 2018.

W. ID	E. ID	Name	StationID	Data	Mw	Faglia M.	Epic.	Durata
0198	93	Montenegro	ST64	15/04/1979	6.9	thrust	21	40.37
0287	146	Campano Lucano	ST93	23/11/1980	6.9	normal	23	60.00
0665	286	Umbria Marche	ST238	26/09/1997	6.0	normal	21	72.68
0294	146	Campano Lucano	ST100	23/11/1980	6.9	normal	26	29.42
7142	2309	Bingol	ST539	01/05/2003	06.03	strike slip	14	76.78
4674	1635	South Iceland	ST2486	17/06/2000	6.5	strike slip	5	70.99
6277	1635	South Iceland	ST2558	17/06/2000	6.5	strike slip	15	64.71

**Tabella A.2:** Set 2 di registrazioni compatibili con lo spettro di progetto di L'Aquila (Italy), in accordo ai criteri di spettro-compatibilità previsti dalle NTC 2018.

W. ID	E. ID	Name	StationID	Data	Mw	Faglia M.	Epic.	Durata
0055	34	Friuli	ST20	06/05/1976	6.5	thrust	23	36.53
6341	2142	South Iceland (aftershock)	ST2497	21/06/2000	6.4	strike slip	20	35.98
6336	2142	South Iceland (aftershock)	ST2563	21/06/2000	6.4	strike slip	24	51.99
5270	1338	Mt. Vantafjoll	ST2486	25/05/1987	-	oblique	25	57.99
7187	2322	Avej	ST3311	22/06/2002	6.5	thrust	28	75.50
6332	2142	South Iceland (aftershock)	ST2483	21/06/2000	6.4	strike slip	6	55.99
6349	2142	South Iceland (aftershock)	ST2558	21/06/2000	6.4	strike slip	5	58.87

**Tabella A.3:** Set 3 di registrazioni compatibili con lo spettro di progetto di Los Angeles (USA), in accordo ai codici ASCE7-10.

W. ID	E. ID	Name	StationID	Data	Mw	Faglia M.	Epic.	Durata
6263	1635	South Iceland	ST2484	17/06/2000	6.5	strike slip	7	66.5
292	146	Campano Lucano	ST98	23/11/1980	6.9	normal	25	27.34
1314	474	Ano Liosia	ST1101	07/09/1999	6.0	normal	17	45.99
7142	2309	Bingol	ST539	01/05/2003	6.3	strike slip	14	76.78
1708	474	Ano Liosia	ST1253	07/09/1999	6.0	normal	19	72.47
6335	2142	South Iceland (aftershock)	ST2557	21/06/2000	6.4	strike slip	15	57.99
4674	1635	South Iceland	ST2486	17/06/2000	6.5	strike slip	5	64.71



# Bibliografia

- [1] Kelly, J. Base isolation: linear theory and design. *Earthquake Spectra*, 6(2): 223-244, 1995
- [2] Den Hartog, J.-P. *Mechanical Vibrations*, 4th edn. McGraw-Hill, New York, 1956
- [3] De Domenico, D. Ricciardi, G. An enhanced base isolation system equipped with optimal tuned mass damper inerter (tmdi). *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 47:1169-1192, 2018
- [4] Giaralis, A. Taflanidis, A.A. Optimal tuned mass-damper-inerter (tmdi) design for seismically excited mdof structures with model uncertainties based on reliability criteria. *Structural Control and Health Monitoring*, 25(2):e2082, 2018
- [5] Fabrizio, C. Di Egidio, A. de Leo, A.M. Top disconnection versus base disconnection in structures subjected to harmonic base excitation. *Engineering Structures*, 152:660-670, 2017
- [6] Fabrizio, C. de Leo, A.M. Di Egidio, A. Tuned mass damper and base isolation: a unitary approach for the seismic protection of conventional frame structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 145(4), 2019
- [7] De Angelis, M. Perno, S. Reggio, A. Dynamic response and optimal design of structures with large mass ratio TMD. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 41:41-60, 2012
- [8] Reggio, A. De Angelis, M. Optimal energy-based seismic design of non-conventional tuned mass damper (tmd) implemented via inter-story isolation. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 44(10):1623-1642, 2015
- [9] Impollonia, N. Palmeri, A. Seismic performance of buildings retrofitted with nonlinear viscous dampers and adjacent reaction towers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 47(5): 1329-1351, 2018.
- [10] Di Egidio, A. Zulli, D. Critical and post-critical galloping behaviour of base isolated coupled towers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 134: 103728, 2021.
- [11] Makris, N. Aghagholizadeh, M. The dynamics of an elastic structure coupled with a rocking wall. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 46: 945-954, 2017.

## BIBLIOGRAFIA

---

- [12] Boake, T.M. Diagrid structures: systems - connections - details. *Birkhauser*, <https://doi.org/10.1515/9783038214823>, 2014.
- [13] Zhu, H.P. Ge, D.D. Huang, X. Optimum connecting dampers to reduce the seismic responses of parallel structures. *Journal of Sound and Vibration*, 330: 1931-1949, 2011.
- [14] Reggio, A. Restuccia, L. Ferro, G.A. Feasibility and effectiveness of exoskeleton structures for seismic protection. *Procedia Structural Integrity*, 9: 303-310, 2018.
- [15] Mazza, F. Dissipative steel exoskeletons for the seismic control of reinforced concrete framed buildings. *Structural Control Health Monitoring*, 28: e2683, 2021.
- [16] Frahm, H. Device for damping vibrations of bodies. *US patent US 989958 A*, 1909
- [17] Ormondroyd, J. Den Hartog, J.-P. The theory of the dynamic vibration absorber. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 50:9-22, 1928
- [18] Den Hartog, J.-P. *Mechanical Vibrations*, 4th edn. McGraw-Hill, New York, 1940
- [19] Warburton, G.B. Ayorinde, E.O. Optimum absorber parameters for simple systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 8(3):197-217, 1980
- [20] Warburton, G.B. Optimum absorber parameters for minimizing vibration response. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 9(3):251-262, 1981
- [21] Tsai, H.C. Lin, G.C. Optimum tuned-mass dampers for minimizing steady-state response of support-excited and damped systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22(11):957-973, 1993
- [22] Ioi, T. Ikeda, K. On the dynamic damped absorber of the vibration system. *Bulletin of the JSME*, 21:64-71, 1978
- [23] Randall, S.E. Halsted, D.M. Taylor, D.L. Optimum vibration absorbers for linear damped systems. *A.S.M.E. Paper No. 78-WA/DE-22*, 1978
- [24] Dai, J. Xu, Z.D. Gai, P.P. Li, H.W. Effect of frequency dependence of large mass ratio viscoelastic tuned mass damper on seismic performance of structures. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 130:105998, 2020
- [25] Kelly, J. M. Base Isolation: Linear Theory and Design *Earthquake Spectra*, 6(2):223-244, 1990
- [26] Naeim, F. Kelly, J. M. Design of Seismic Isolated Structures: From Theory to Practice *Wiley, Hoboken* 1999
- [27] Kelly, J. M. The role of damping in seismic isolation *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28:3-20, 1999
- [28] Tsai, H.C. S. Kelly, J. M. Non-classical damping in dynamic analysis of base-isolated structures with internal equipment *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 16:29-43, 1988

- [29] Clough, R. W. Penzien, J. *Dynamics of structures* Computers and Structures, Berkeley, 1995
- [30] Veletsos, A.S. Ventura, C. E. Modal Analysis of non-classically damped linear systems *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 14:217-243, 1986
- [31] Housner, G. W. The behavior of inverted pendulum structures during earthquakes *Bulletin of the Seismological Society of America* 53(2): 403-417, 1963.
- [32] Spanos, P. Koh, A. Rocking of rigid blocks due to harmonic shaking *Journal of Engineering Mechanics* 110: 1627-1642, 1984.
- [33] Kounadis, A.N. Parametric study in rocking instability of a rigid block under harmonic ground pulse: a unified approach *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 45: 125-143, 2013.
- [34] Zhang, J. Makris, N. Rocking response of free-standing blocks under cycloidal pulses *Journal of Engineering Mechanics* 127(5): 473-483, 2001.
- [35] Yim, C.S. Chopra, A.K. Penzien, J. Rocking response of rigid blocks to earthquakes *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 8(6): 565-587, 1980.
- [36] Voyagaki, E. Psycharis, I.N. Mylonakis, G. Rocking response and overturning criteria for free standing rigid blocks to single-lobe pulses *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 46: 85-95, 2013.
- [37] Andreaus, U. Sliding-uplifting response of rigid blocks to base excitation *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 19(8): 1181-1196, 1990.
- [38] Pompei, A. Scalia, A. Sumbatyan, M. Dynamics of rigid block due to horizontal ground motion *Journal of Engineering Mechanics* 124(7): 713-717, 1998.
- [39] Psycharis, I.N. Fragiadakis, M. Stefanou, I. Seismic reliability assessment of classical columns subjected to near-fault ground motions *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 42(14): 2061-2079, 2013.
- [40] Vassiliou, M.F. Mackie K.R. Stojadinović, B. Dynamic response analysis of solitary flexible rocking bodies: modeling and behavior under pulse-like ground excitation *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 43(10): 1463-1481, 2014.
- [41] Di Egidio, A. Zulli, D. Contento, A. Comparison between the seismic response of 2d and 3d models of rigid blocks *Earthquake Engineering and Engineering Vibration* 13: 151-162, 2014.
- [42] Di Egidio, A. Alaggio, R. Contento, A., Tursini, M. Della Loggia, E. Experimental characterization of the overturning of three-dimensional square based rigid block *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 69: 137-145, 2015.

- [43] Spanos, P. Di Matteo, A. Pirrotta, A. Di Paola, M. Rocking of rigid block on nonlinear flexible foundation *International Journal of Non-Linear Mechanics* 94: 362-374, 2017.
- [44] DeJong, M.J. Dimitrakopoulos, E.G. Dynamically equivalent rocking structures *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 43(10): 1543-1563, 2014.
- [45] Makris, N. Zhang, J. Rocking response of anchored blocks under pulse-type motions *Journal of Engineering Mechanics* 127(5): 484-493, 2001.
- [46] Contento, A. Di Egidio, A. Investigations into Benefits of Base Isolation for Non-Symmetric Rigid Blocks *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 38: 849-866, 2009.
- [47] Caliò, I. Marletta, M. Passive control of the seismic response of art objects *Engineering Structures* 25: 1009-1018, 2003.
- [48] Vassiliou, M.F. Makris, N. Analysis of the rocking response of rigid blocks standing free on a seismically isolated base *Earthquake engineering and structural dynamics* 41(2): 177-196, 2012.
- [49] Collini, L. Garziera, R. Riabova, K. Munitsyna, M. Tasora, A. Oscillations Control of Rocking-Block-Type Buildings by the Addition of a Tuned Pendulum *Shock and Vibration* Article ID 8570538, 2016.
- [50] Brzeski, P. Kapitaniak, T. Perlikowski, P. The use of tuned mass absorber to prevent overturning of the rigid block during earthquake *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 16(10): 2016.
- [51] de Leo, A.M. Simoneschi, G. Fabrizio, C. Di Egidio, A. On the use of a pendulum as mass damper to control the rocking motion of a non-symmetric rigid block *Meccanica* 51: 2727-2740, 2016.
- [52] Di Egidio, A. Alaggio, R. Aloisio, A. de Leo, A.M. Contento, A. Tursini, M. Analytical and experimental investigation into the effectiveness of a pendulum dynamic absorber to protect rigid blocks from overturning *Int. Journal of Non-Linear Mechanics* 115: 1-10, 2019.
- [53] Simoneschi, G. de Leo, A.M. Di Egidio, A. Effectiveness of oscillating mass damper system in the protection of rigid blocks under impulsive excitation *Engineering Structures*, 137:285-295, 2017
- [54] Makris, N. Aghagholizadeh, M. Effect of supplemental hysteretic and viscous damping on rocking response of free-standing columns *Journal of Engineering Mechanics*, 145(5), 2017
- [55] Di Egidio, A. Simoneschi, G. Oliveri, C. de Leo, A. Protection of slender rigid blocks from the overturning by using an active control system *Proceedings of the XXIII Conference The Italian Association of Theoretical and Applied Mechanics*, 2014
- [56] Simoneschi, G. Olivieri, C. de Leo, A. Di Egidio, A. Pole placement method to control the rocking motion of rigid blocks *Engineering Structures*, 167:39-47, 2018
- [57] Smith, M.C. Synthesis of mechanical networks: the inerter *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:1648-1662, 2002

- [58] Makris, N. Kampas, G. Seismic protection of structures with supplemental rotational inertia *Journal of Engineering Mechanics*, 142(11), 2016
- [59] Makris, N. Gholamreza Moghimi, G. Displacements and forces in structures with inerters when subjected to earthquakes *Journal of Engineering Mechanics*, 145(2), 2019
- [60] Thiers-Moggia, R. Málaga-Chuquitaype, C. Seismic protection of rocking structures with inerters *Earthquake engineering and structural dynamics*, 48(5):528-547, 2018
- [61] Wang, S.J. Hwang, J.S. Chang, K.C. Lin, M.H. Lee, B.H. Analytical and experimental studies on midstory isolated buildings with modal coupling effect. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 42:201-219, 2013
- [62] Chopra, A.K. *Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995
- [63] Villaverde, R. Mosqueda, G. Aseismic roof isolation system: analytic and shake table studies. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28:217-234, 1999
- [64] Villaverde, R. Aguirre, M. Hamilton, C. Aseismic roof isolation system built with steel oval elements *Earthquake Spectra*, 21(1):225-241, 2005
- [65] Ziyaeifar, M. Noguchi, H. Partial mass isolation in tall buildings. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 27:49-65, 1998
- [66] Murakami, K. Kitamura, H. Ozaki, H. Teramoto, T. Design and analysis of a building with the middle-story isolation structural system. *Proceeding 12th World conference on earthquake engineering*, Auckland, New Zealand, 2000
- [67] Tsuneki, Y. Torii, S. Murakami, K. Sueoka, T. Middle-Story Isolated Structural System of High-Rise Building. *J. Disaster Res*, 4(3):229-238, 2009
- [68] Sueoka, T. Torii, S. Tsuneki, Y. The application of response control design using middle-story isolation system to high rise building. *Proceeding 13th World conference on earthquake engineering*, Vancouver, Canada, 2004
- [69] Faiella, D. Mele, E. Insights into inter-story isolation design through the analysis of two case studies. *Engineering Structures*, 215:110660, 2020
- [70] Kawamura, S. Sugisaki, R. Ogura, K. Maezawa, S. Tanaka, S. Yajima, A. Seismic isolation retrofit in Japan. *Proceeding 12th World conference on earthquake engineering*, Auckland, New Zealand, 2000
- [71] Warburton, G. B. Soni, S. R. Errors in response calculations for non-classically damped structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 5:365-376, 1977
- [72] Hwang, J. S. Kim, H. J. Mode decomposition of structures with closely distributed modes and nonclassical damping. *Structural Control and Health Monitoring*, 25(1):e2065, 2018

## BIBLIOGRAFIA

---

- [73] Chen, H. Tan, P. Zhou, F. An improved response spectrum method for non-classically damped systems. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 15:4375-4397, 2017
- [74] Lestuzzi, P. Youssef, B. Trueb, M. Non-linear seismic behavior of structures with limited hysteretic energy dissipation capacity. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 5(4):549-569, 2007
- [75] Wen, Y.-K. Method for random vibration of hysteretic systems. *Journal of Engineering Mechanics*, 102(2):249-263, 1976
- [76] Charalampakis, A. E. Parameters of Bouc-Wen hysteretic model revisited. *Proceeding of the 9th HSTAM International Congress on Mechanics*, Limassol, Cyprus, 2010
- [77] Ma, F. Zhang, H. Bockstedte, A. Foliente, G.C. Paevere, P. Parameter Analysis of the Differential Model of Hysteresis. *Journal of Engineering Mechanics*, 71:342-349, 2004
- [78] Constantinou, M.C. Adnane, M.A. Dynamics of soil-base-isolated structure systems: evaluation of two models for yielding systems. *Report to NSAF*, Drexel University, Philadelphia, 1987
- [79] <https://peer.berkeley.edu> Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER). *Strong ground motion database*, Accessed: 2021-06-11
- [80] Makris, N. Aghagholizadeh, M. The dynamics of an elastic structure coupled with a rocking wall *Earthquake engineering and structural dynamics*, 46:945-954, 2017
- [81] Aghagholizadeh, M. Makris, N. Earthquake response analysis of yielding structures coupled with vertically restrained rocking walls *Earthquake engineering and structural dynamics*, 47(15):2965-2984, 2018
- [82] Palmeri, A. Makris, N. Response analysis of rigid structures rocking on viscoelastic foundation *Earthquake engineering and structural dynamics*, 37:1039-1065, 2008
- [83] Newmark, N.M. Hall, W.J. *Earthquake Spectra and Design*, EERI Research Report, 82-71183, 103 pp., 1982
- [84] Romeo Roberto, W. Le azioni sismiche e le categorie di sottosuolo *Giornale di geologia applicata*, 6:65-80, 2007
- [85] Iervolino, I. Galasso, C. Cosenza, E. Rexel: computer aided record selection for code-based seismic structural analysis *Bulletin of Earthquake Engineering*, 8:339-362, 2010
- [86] Ther, T. and Kollar, L. Refinement of Housners model on rocking blocks *Bulletin of Earthquake Engineering*, 1-26, 2011
- [87] Sorrentino, L. AlShawa, O. Decanini, L. The relevance of energy damping in unreinforced masonry rocking mechanisms. Experimental and analytic investigations *Bulletin of Earthquake Engineering*, 15:2305-2319, 2016

- [88] Kalliontzis, D., Sritharan, S. Schultz, A. Improved coefficient of restitution estimation for free rocking members *Journal of Structural Engineering*, 142, 2016
- [89] Kounadis, A. The effect of sliding on the rocking instability of multi-rigid block assemblies under ground motion *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 104:1-14, 2018
- [90] Franklin Y. Cheng Matrix Analysis of Structural Dynamics - Applications and Earthquake Engineering MARCEL DEKKER, INC. - ISBN: 0-8427-0387-1, 270 Madison Avenue, New York, NY 10016, 2000
- [91] Gattulli, V. Potenza, F. Lepidi, M. ! Damping performance of two simple oscillators coupled by a visco-elastic connection *Journal of Sound and Vibration*, 332:6934-6948, 2013