Sulla misura del livello di anatocismo presente nelle operazioni finanziarie regolate dal regime della capitalizzazione composta Versione estesa - Ammortamenti

Antonio Annibali [1] - Alessandro Annibali [2] - Carla Barracchini [3] – Francesco Olivieri [4]

[1] *Professore Ordinario fr di Matematica Finanziaria, Attuario - Facoltà di Economia, Università degli Studi 'La Sapienza' di Roma - email: antonio.annibali@uniroma1.it, antonio.annibali@gmail.com, antonio.annibali@legalmail.it*

[2] *Ingegnere finanziario senior developer –EDWH expert - email: alexannibali@openaccess.it - Sito: www.attuariale.eu*

[3] *Professore Associato di Matematica Finanziaria, Dipartimento di Ingegneria industriale, di Informatica e di Economia, Università degli studi de L'Aquila - email: carla.barracchini@ec.univaq.it*

[4] *Attuario professionista – Consulente Tecnico di ufficio presso il Tribunale di Roma - email: olivierifrancesco@alice.it*

Nel precedente articolo è stato mostrato come, nel regime finanziario della capitalizzazione composta, il fattore di capitalizzazione $r_{\overline{t|}i}$*, se il tempo* t *corrisponde a un numero naturale (ossia, intero positivo)* n*, sia rappresentabile secondo la tradizionale formula di Newton di sviluppo della potenza di un binomio*

$$r_{\overline{n|}i} = (1+i)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i + \binom{n}{2} i^2 + \binom{n}{3} i^3 + \cdots + \binom{n}{n-2} i^{n-2} + \binom{n}{n-1} i^{n-1} + \binom{n}{n} i^n$$

In particolare per ***n = 0, 1, 2, …, 6, …*** *risulta*

$$r_{\overline{0|}i} = (1+i)^0 = 1$$

$$r_{\overline{1|}i} = (1+i)^1 = 1 + i$$

$$r_{\overline{2|}i} = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2$$

$$r_{\overline{3|}i} = (1+i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3$$

$$r_{\overline{4|}i} = (1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4$$

$$r_{\overline{5|}i} = (1+i)^5 = 1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5$$

$$r_{\overline{6|}i} = (1+i)^6 = 1 + 6i + 15i^2 + 20i^3 + 15i^4 + 6i^5 + i^6$$

… … …

Quanto sopra evidenziato, mostra come l'espressione $(1+i)^n$*, nel suo evolversi al crescere di* ***n****, corrisponda dinamicamente a fissati polinomi, il cui grado corrisponde logicamente al numero* ***n****, e come i termini di grado superiore al primo rappresentino i termini* ***anatocistici*** *dello sviluppo. Infatti mentre il monomio di primo grado si riferisce agli interessi (****base****) maturati sul capitale prestato, il monomio di secondo grado riguarda gli interessi su interessi (base) precedentemente maturati (****interessi anatocistici di secondo livello****), il monomio di terzo grado riguarda gli interessi anatocistici su interessi anatocistici di secondo livello (****interessi anatocistici di terzo livello****) e cosí via, fino al monomio di grado* ***n****, che si riferisce agli interessi* *anatocistici su interessi anatocistici di livello **n-1** (ossia **interessi anatocistici di livello n**). Per le siuccessive considerazioni risulterà importantee identificare, per ciascuna singola porzione di interessi anatocistici (**dal secondo livello** in poi), la quota interessi (**base**) che l'ha generata.*

*A titolo di esempio, considerando, come ampiezza dell'intervallo di svolgimento dell'operazione finanziaria, **6** periodi e ipotizzando che il tasso annuo effettivo di interesse sia pari al **10%**, si ha*

$$\boldsymbol{r_{\overline{6|}0,1}} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathbf{1}}_{1} + \underbrace{\mathbf{6\cdot 0,1}}_{0,6}}_{1,6} + \underbrace{\mathbf{15\cdot 0,01}}_{0,15}}_{1,75} + \underbrace{\mathbf{20\cdot 0,001}}_{0,02}}_{1,77} + \underbrace{\mathbf{15\cdot 0,0001}}_{0,0015}}_{1,7715} + \underbrace{\mathbf{6\cdot 0,00001}}_{0,00006}}_{1,77156} + \underbrace{\mathbf{0,000001}}_{0,000001}}_{1,771561}$$

*Sempre nel precedente articolo, fissando un capitale prestato di **D = € 1.000.000**, è stato mostrato come il montante finale di **€ 1.771.561** sia la somma del capitale prestato, degli interessi di base (**€ 600.000**) e degli interessi anatocistici (**€ 171.561**) e come sia possibile distinguere tali interessi anatocistici in base al livello di anatocismo e al tempo di maturazione (rif. Allegato A1)*

Tempi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Interessi	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*600.000*
Livello 2		*10.000*	*20.000*	*30.000*	*40.000*	*50.000*	*150.000*
Livello 3			*1.000*	*3.000*	*6.000*	*10.000*	*20.000*
Livello 4				*100*	*400*	*1.000*	*1.500*
Livello 5					*10*	*50*	*60*
Livello 6						*1*	*1*
Int. period.	*100.000*	*110.000*	*121.000*	*133.100*	*146.410*	*161.051*	*771.561*
Int. anato	*0*	*10.000*	*21.000*	*33.100*	*46.410*	*61.051*	*171.561*

oppure in base al livello di anatocismo e alla quota interessi che li ha generati

Tempi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Interessi	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*600.000*
Livello 2	*50.000*	*40.000*	*30.000*	*20.000*	*10.000*		*150.000*
Livello 3	*10.000*	*6.000*	*3.000*	*1.000*			*20.000*
Livello 4	*1.000*	*400*	*100*				*1.500*
Livello 5	*50*	*10*					*60*
Livello 6	*1*						*1*
Int. finali	*161.051*	*146.410*	*133.100*	*121.000*	*110.000*	*100.000*	*771.561*
Int. anato	*61.051*	*46.410*	*33.100*	*21.000*	*10.000*	*0*	*171.561*

dove si vede che

$$\boldsymbol{I_k^{fin} = I_k\, r_{\overline{n-k|}i} = 100.000(1+i)^{n-k}} \qquad \boldsymbol{k = 1{:}n}$$

e in particolare

$$I_1^{fin} = I_1\, r_{\overline{5}|i} = 100.000(1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5) = 161.151$$

$$I_2^{fin} = I_2\, r_{\overline{4}|i} = 100.000(1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4) = 146.410$$

$$I_3^{fin} = I_3\, r_{\overline{3}|i} = 100.000(1 + 3i + 3i^2 + i^3) = 133.100$$

$$I_4^{fin} = I_4\, r_{\overline{2}|i} = 100.000(1 + 2i + i^2) = 121.000$$

$$I_5^{fin} = I_5\, r_{\overline{1}|i} = 100.000(1 + i) = 110.000$$

$$I_6^{fin} = I_6\, r_{\overline{0}|i} = 100.000 \cdot 1 = 100.000$$

essendo

$$r_{\overline{6}|i} = 1 + i\,(r_{\overline{5}|i} + r_{\overline{4}|i} + r_{\overline{3}|i} + r_{\overline{2}|i} + r_{\overline{1}|i} + r_{\overline{0}|i})$$

*L'operazione considerata riguarda il caso di un prestito con restituzione finale del capitale e pagamento parimenti finale degli interessi (calcolati secondo il regime finanziario della capitalizzazione composta). Tale operazione può essere schematizzata nel seguente cash-flow (essendo **D** il capitale prestato, **I** la somma degli interessi base e **A** la somma degli interessi anatocistici)*

$$\underbrace{(-1.000.000; 0)}_{(-D;0)}\ \underbrace{(\underbrace{1.771.561}_{1.000.000\cdot r_{\overline{6}|i}}; 6)}_{(D+I+A;6)}$$

*Qualora si volesse, mantenendo l'equità dell'operazione finanziaria nel regime finanziario della capitalizzazione composta, anticipare il pagamento degli interessi ai singoli tempi della loro maturazione, è necessario, partendo dalla scomposizione dell'ammontare finale degli interessi **(€ 771.561)** nelle sue componenti costitutive, attualizzare (nel regime finanziario adottato della capitalizzazione composta) tali componenti ai rispettivi tempi di maturazione*

$$I_k^{att} = I_k^{fin} v_{\overline{n-k}|i} = I_k\, r_{\overline{n-k}|i} v_{\overline{n-k}|i} = 100.000 \frac{(1+i)^{n-k}}{(1+i)^{n-k}} = 100.000 = I_k \qquad k = 1{:}n$$

e in particolare

$$I_1^{att} = I_1^{fin} v_{\overline{5}|i} = I_1\, r_{\overline{5}|i} v_{\overline{5}|i} = 100.000 \frac{1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5}{1 + 5i + 10i^2 + 10i^3 + 5i^4 + i^5} = 100.000 = I_1$$

$$I_2^{att} = I_2^{fin} v_{\overline{4}|i} = I_2\, r_{\overline{4}|i} v_{\overline{4}|i} = 100.000 \frac{1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4}{1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4} = 100.000 = I_2$$

$$I_3^{att} = I_3^{fin} v_{\overline{3}|i} = I_3\, r_{\overline{3}|i} v_{\overline{3}|i} = 100.000 \frac{1 + 3i + 3i^2 + i^3}{1 + 3i + 3i^2 + i^3} = 100.000 = I_3$$

$$I_4^{att} = I_4^{fin} v_{\overline{2}|i} = I_4\, r_{\overline{2}|i} v_{\overline{2}|i} = 100.000 \frac{1 + 2i + i^2}{1 + 2i + i^2} = 100.000 = I_4$$

$$I_5^{att} = I_5^{fin} v_{\overline{1}|i} = I_5\, r_{\overline{1}|i} v_{\overline{1}|i} = 100.000 \frac{1 + i}{1 + i} = 100.000 = I_5$$

$$I_6^{att} = I_6^{fin} v_{\overline{0}|i} = I_5\, r_{\overline{0}|i} v_{\overline{0}|i} = 100.000 \frac{1}{1} = 100.000 = I_6$$

***Nota**: Il pagamento delle sei quote interessi di **€ 100.000** ai tempi **1, 2, …, 6**, in sostituzione dell'equivalente pagamento finale degli interessi, per **€ 771.561,** al **tempo finale 6**, mantiene l'equità dell'operazione finanziaria e quindi conserva la presenza del fenomeno anatocismo precedentemente evidenziato; il cash-flow risultante*

$$\underbrace{(-1.000.000; 0)}_{(-D;0)}\ \underbrace{(100.000; 1)}_{(I_1;1)}\ \underbrace{(100.000; 2)}_{(I_2;2)} \dots \underbrace{(100.000; 5)}_{(I_5;5)}\ \underbrace{(1.100.000; 6)}_{(D+I_6;6)}$$

nell'ipotesi che ogni importo disponibile possa essere reimpiegato alle stesse condizioni di mercato dell'operazione considerata, risulta finanziariamente equivalente al precedente cash-flow. Si rammenta che la presenza di anatocismo dipende dal regime finanziario adottato e non già dalla struttura dell'operazione finanziaria.

Volendo dare alle due precedenti tipologie di operazione finanziaria (con pagamento finale oppure anticipato degli interessi) la forma di piano di ammortamento, l'andamento del processo può essere rappresentato nel modo seguente

t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	0	100.000	-100.000	1.100.000
2	0	110.000	-110.000	1.210.000
3	0	121.000	-121.000	1.331.000
4	0	133.100	-133.100	1.464.100
5	0	146.410	-146.410	1.610.510
6	1.771.561	161.151	1.610.510	0

t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	100.000	100.000	0	1.000.000
2	100.000	100.000	0	1.000.000
3	100.000	100.000	0	1.000.000
4	100.000	100.000	0	1.000.000
5	100.000	100.000	0	1.000.000
6	1.100.000	100.000	1.000.000	0

Quanto considerato in precedenza si basa sul fatto che il fattore di capitalizzazione nel regime finanziario della capitalizzazione composta corrisponda dinamicamente ai polinomi ottenuti mediante la formula di sviluppo del binomio di Newton, con la conseguente presenza di tutti i monomi anatocistici. Volendo porre una limitazione superiore alla formazione di tale fenomeno anatocistico, l'ipotesi operativa può essere quella di fissare il grado massimo di tali sviluppi, impedendo la formazione delle porzioni di interessi anatocistici al di sopra di un certo livello. La considerazione di sviluppi troncati genera un allontanamento dal regime della capitalizzazione composta, generando regimi di capitalizzazione polinomiali, nei quali il fenomeno anatocistico risulta condizionato (ossia mantenuto, ridotto oppure eliminato).

Partendo quindi dalla formula inizialmente introdotta relativa allo sviluppo della potenza di un binomio, secondo la formula di Newton, si supponga di decidere lo sviluppo debba essere *troncato (se necessario) al termine caratterizzato dal grado **w**, con eliminazione degli eventuali monomi anatocistici di livello superiore a **w***

$$r^{w}_{\overline{n|}i} = \sum_{k=0}^{\overbrace{min(n,w)}^{s}} \binom{n}{k} i^k = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} i + \binom{n}{2} i^2 + \binom{n}{3} i^3 + \cdots + \binom{n}{s-1} i^{s-1} + \binom{n}{s} i^s$$

*Nel seguito saranno separatamente trattati i casi relativi a **w = 3, 2 e 1**, relativi rispettivamente ai regimi finanziari della capitalizzazione cubica, parabolica e lineare (ossia semplice), seguendo lo schema precedentemente utilizzato per il regime della capitalizzazione composta. Quanto illustrato in precedenza, relativo al regime della capitalizzazione composta, corrisponde algebricamente al caso **w = 6**.*

<u>Caso w = 3 – Regime finanziario della capitalizzazione cubica</u>

$$r^{3}_{\overline{6|}i} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{1} + \underbrace{6 \cdot 0,1}_{0,6}}_{1,6} + \underbrace{15 \cdot 0,01}_{0,15}}_{1,75} + \underbrace{20 \cdot 0,001}_{0,02}}_{1,77}$$

*Sempre nel precedente articolo è stato mostrato come il montante finale di **€ 1.770.000** sia la somma del capitale prestato, degli interessi di base (**€ 600.000**) e degli interessi anatocistici (**€ 170.000**) e come sia possibile distinguere tali interessi anatocistici in base al livello di anatocismo e al tempo di maturazione (rif. Allegato A2)*

Tempi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Interessi	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*600.000*
Livello 2		*10.000*	*20.000*	*30.000*	*40.000*	*50.000*	*150.000*
Livello 3			*1.000*	*3.000*	*6.000*	*10.000*	*20.000*
Int. period.	*100.000*	*110.000*	*121.000*	*133.000*	*146.000*	*160.000*	*770.000*
Int. anato	*0*	*10.000*	*21.000*	*33.000*	*46.000*	*60.000*	*170.000*

oppure in base al livello di anatocismo e alla quota interessi che li ha generati

Tempi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Interessi	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*600.000*
Livello 2	*50.000*	*40.000*	*30.000*	*20.000*	*10.000*		*150.000*
Livello 3	*10.000*	*6.000*	*3.000*	*1.000*			*20.000*
Int. finali	*160.000*	*146.000*	*133.000*	*121.000*	*110.000*	*100.000*	*770.000*
Int. anato	*60.000*	*46.000*	*33.000*	*21.000*	*10.000*	*0*	*170.000*

dove si vede che

$$I_k^{fin} = I_k \, r^{2}_{\overline{n-k|}i} \qquad k = 1{:}n$$

e in particolare

$$I_1^{fin} = I_1\, r^2_{\overline{5}|i} = 100.000(1 + 5i + 10i^2) = 160.000$$

$$I_2^{fin} = I_2\, r^2_{\overline{4}|i} = 100.000(1 + 4i + 6i^2) = 146.000$$

$$I_3^{fin} = I_3\, r^2_{\overline{3}|i} = 100.000(1 + 3i + 3i^2) = 133.000$$

$$I_4^{fin} = I_4\, r^2_{\overline{2}|i} = 100.000(1 + 2i + i^2) = 121.000$$

$$I_5^{fin} = I_5\, r^2_{\overline{1}|i} = 100.000(1 + i) = 110.000$$

$$I_6^{fin} = I_6\, r^2_{\overline{0}|i} = 100.000 \cdot 1 = 100.000$$

essendo

$$r^3_{\overline{6}|i} = 1 + i(r^2_{\overline{5}|i} + r^2_{\overline{4}|i} + r^2_{\overline{3}|i} + r^2_{\overline{2}|i} + r^2_{\overline{1}|i} + r^2_{\overline{0}|i})$$

*Tale operazione può essere schematizzata nel seguente cash-flow (essendo **D** il capitale prestato, **I** la somma degli interessi base e **A** la somma degli interessi anatocistici)*

$$\underbrace{(-1.000.000; 0)}_{(-D;0)} \quad \underbrace{(\underbrace{1.770.000}_{1.000.000\cdot r^3_{\overline{6}|i}}; 6)}_{(D+I+A;6)}$$

*Qualora si volesse, mantenendo l'equità dell'operazione finanziaria nel regime finanziario della capitalizzazione cubica, anticipare il pagamento degli interessi ai singoli tempi della loro maturazione, è necessario, partendo dalla scomposizione dell'ammontare finale degli interessi **(€ 770.000)** nelle sue componenti costitutive, attualizzare (nel regime finanziario adottato della capitalizzazione cubica) tali componenti ai rispettivi tempi di maturazione*

$$I_k^{att} = I_k^{fin} v^3_{\overline{n-k}|i} = I_k\, r^2_{\overline{n-k}|i} v^3_{\overline{n-k}|i} \qquad k = 1{:}\,n$$

e in particolare

$$I_1^{att} = I_1^{fin} v^3_{\overline{5}|i} = I_1\, r^2_{\overline{5}|i} v^3_{\overline{5}|i} = 100.000 \frac{1 + 5i + 10i^2}{1 + 5i + 10i^2 + 10i^3} = 99.378,88$$

$$I_2^{att} = I_2^{fin} v^3_{\overline{4}|i} = I_2\, r^2_{\overline{4}|i} v^3_{\overline{4}|i} = 100.000 \frac{1 + 4i + 6i^2}{1 + 4i + 6i^2 + 4i^3} = 99.726,78$$

$$I_3^{att} = I_3^{fin} v^3_{\overline{3}|i} = I_3\, r^2_{\overline{3}|i} v^3_{\overline{3}|i} = 100.000 \frac{1 + 3i + 3i^2}{1 + 3i + 3i^2 + i^3} = 99.924,87$$

$$I_4^{att} = I_4^{fin} v^3_{\overline{2}|i} = I_4\, r^2_{\overline{2}|i} v^3_{\overline{2}|i} = 100.000 \frac{1 + 2i + i^2}{1 + 2i + i^2} = 100.000 = I_4$$

$$I_5^{att} = I_5^{fin} v^3_{\overline{1}|i} = I_5\, r^2_{\overline{1}|i} v^3_{\overline{1}|i} = 100.000 \frac{1 + i}{1 + i} = 100.000 = I_5$$

$$I_6^{att} = I_6^{fin} v_{0|i}^{3} = I_5\, r_{0|i}^{2} v_{0|i}^{3} = 100.000 \frac{1}{1} = 100.000 = I_6$$

***Nota**: Il pagamento delle quote interessi ai tempi **1, 2, …, 6**, in sostituzione dell'equivalente pagamento finale degli interessi, per **€ 770.000,** al **tempo finale 6**, mantiene l'equità dell'operazione finanziaria e quindi conserva la presenza del fenomeno anatocismo precedentemente evidenziato; il cash-flow risultante*

$$\underbrace{(-1.000.000;0)}_{(-D;0)}\ \underbrace{(99.378,88;1)}_{(I_1^{att};1)}\ \underbrace{(99.726,78;2)}_{(I_2^{att};2)} \dots \underbrace{(100.000;5)}_{(I_5;5)}\ \underbrace{(1.100.000;6)}_{(D+I_6;6)}$$

nell'ipotesi che ogni importo disponibile possa essere reimpiegato alle stesse condizioni di mercato dell'operazione considerata, risulta finanziariamente equivalente al precedente cash-flow.

Volendo dare alle due precedenti tipologie di operazione finanziaria (con pagamento finale oppure anticipato degli interessi) la forma di piano di ammortamento, l'andamento del processo può essere rappresentato nel modo seguente

t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	0	100.000	-100.000	1.100.000
2	0	110.000	-110.000	1.210.000
3	0	121.000	-121.000	1.331.000
4	0	133.000	-133.000	1.464.000
5	0	146.000	-146.000	1.610.000
6	1.770.000	160.000	1.610.000	0

t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	99.378,88	99.378,88	0	1.000.000
2	99.726,78	99.726,78	0	1.000.000
3	99.924,87	99.924,87	0	1.000.000
4	100.000	100.000	0	1.000.000
5	100.000	100.000	0	1.000.000
6	1.100.000	100.000	1.000.000	0

<u>Caso w = 2– Regime finanziario della capitalizzazione parabolica</u>

$$r_{6|i}^{2} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{1} + \underbrace{6 \cdot 0,1}_{0,6}}_{1,6} + \underbrace{15 \cdot 0,01}_{0,15}}_{1,75}$$

*Sempre nel precedente articolo è stato mostrato come il montante finale di **€ 1.750.000** sia la somma del capitale prestato, degli interessi di base (**€ 600.000**) e degli interessi anatocistici (**€ 150.000**) e come sia possibile distinguere tali interessi anatocistici in base al livello di anatocismo e al tempo di maturazione (rif. Allegato A3)*

Tempi	1	2	3	4	5	6	Tempi
Interessi	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	600.000
Livello 2		10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	150.000
Int. period.	100.000	110.000	120.000	130.000	140.000	150.000	750.000
Int. anato	0	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	150.000

oppure in base al livello di anatocismo e alla quota interessi che li ha generati

Tempi	1	2	3	4	5	6	Tempi
Interessi	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	600.000
Livello 2	50.000	40.000	30.000	20.000	10.000		150.000
Int. finali	150.000	140.000	130.000	120.000	110.000	100.000	750.000
Int. anato	50.000	40.000	30.000	20.000	10.000	0	150.000

dove si vede che

$$\boldsymbol{I_k^{fin} = I_k\, r^1_{\overline{n-k}|i} \qquad k = 1{:}n}$$

e in particolare

$$\boldsymbol{I_1^{fin} = I_1\, r^1_{\overline{5}|i} = 100.000(1+5i) = 150.000}$$

$$\boldsymbol{I_2^{fin} = I_2\, r^1_{\overline{4}|i} = 100.000(1+4i) = 140.000}$$

$$\boldsymbol{I_3^{fin} = I_3\, r^1_{\overline{3}|i} = 100.000(1+3i) = 130.000}$$

$$\boldsymbol{I_4^{fin} = I_4\, r^1_{\overline{2}|i} = 100.000(1+2i) = 120.000}$$

$$\boldsymbol{I_5^{fin} = I_5\, r^1_{\overline{1}|i} = 100.000(1+i) = 110.000}$$

$$\boldsymbol{I_6^{fin} = I_6\, r^1_{\overline{0}|i} = 100.000 \cdot 1 = 100.000}$$

essendo

$$\boldsymbol{r^2_{\overline{6}|i} = 1 + i(r^1_{\overline{5}|i} + r^1_{\overline{4}|i} + r^1_{\overline{3}|i} + r^1_{\overline{2}|i} + r^1_{\overline{1}|i} + r^1_{\overline{0}|i})}$$

*Tale operazione può essere schematizzata nel seguente cash-flow (essendo **D** il capitale prestato, **I** la somma degli interessi base e **A** la somma degli interessi anatocistici)*

$$\underbrace{\boldsymbol{(-1.000.000;0)}}_{(-\boldsymbol{D};0)}\ \underbrace{\boldsymbol{(\underbrace{1.750.000}_{1.000.000\cdot r^2_{\overline{6}|i}};6)}}_{(\boldsymbol{D+I+A};6)}$$

*Qualora si volesse, mantenendo l'equità dell'operazione finanziaria nel regime finanziario della capitalizzazione parabolica, anticipare il pagamento degli interessi ai singoli tempi della loro maturazione, è necessario, partendo dalla scomposizione dell'ammontare finale degli interessi **(€ 750.000)** nelle sue componenti costitutive, attualizzare (nel regime finanziario adottato della capitalizzazione parabolica) tali componenti ai rispettivi tempi di maturazione*

$$\boldsymbol{I_k^{att} = I_k^{fin} v^2_{\overline{n-k}|i} = I_k\, r^1_{\overline{n-k}|i} v^2_{\overline{n-k}|i} \qquad k = 1{:}n}$$

e in particolare

$$I_1^{att} = I_1^{fin} v_{\overline{5}|i}^2 = I_1\, r_{\overline{5}|i}^1 v_{\overline{5}|i}^2 = 100.000 \frac{1+5i}{1+5i+10i^2} = 93.750,00$$

$$I_2^{att} = I_2^{fin} v_{\overline{4}|i}^2 = I_2\, r_{\overline{4}|i}^1 v_{\overline{4}|i}^2 = 100.000 \frac{1+4i}{1+4i+6i^2} = 95.890,41$$

$$I_3^{att} = I_3^{fin} v_{\overline{3}|i}^2 = I_3\, r_{\overline{3}|i}^1 v_{\overline{3}|i}^2 = 100.000 \frac{1+3i}{1+3i+3i^2} = 97.744,36$$

$$I_4^{att} = I_4^{fin} v_{\overline{2}|i}^2 = I_4\, r_{\overline{2}|i}^1 v_{\overline{2}|i}^2 = 100.000 \frac{1+2i}{1+2i+i^2} = 99.173,55$$

$$I_5^{att} = I_5^{fin} v_{\overline{1}|i}^2 = I_5\, r_{\overline{1}|i}^1 v_{\overline{1}|i}^2 = 100.000 \frac{1+i}{1+i} = 100.000 = I_5$$

$$I_6^{att} = I_6^{fin} v_{\overline{0}|i}^2 = I_5\, r_{\overline{0}|i}^1 v_{\overline{0}|i}^2 = 100.000 \frac{1}{1} = 100.000 = I_6$$

<u>Nota</u>: *Il pagamento delle quote interessi ai tempi **1, 2, …, 6**, in sostituzione dell'equivalente pagamento finale degli interessi, per **€ 750.000,** al **tempo finale 6**, mantiene l'equità dell'operazione finanziaria e quindi conserva la presenza del fenomeno anatocismo precedentemente evidenziato; il cash-flow risultante*

$$\underbrace{(-1.000.000;0)}_{(-D;0)}\ \underbrace{(93.750,00;1)}_{(I_1^{att};1)}\ \underbrace{(95.890,41;2)}_{(I_2^{att};2)} \dots \underbrace{(100.000;5)}_{(I_5;5)}\ \underbrace{(1.100.000;6)}_{(D+I_6;6)}$$

nell'ipotesi che ogni importo disponibile possa essere reimpiegato alle stesse condizioni di mercato dell'operazione considerata, risulta finanziariamente equivalente al precedente cash-flow.

Volendo dare alle due precedenti tipologie di operazione finanziaria (con pagamento finale oppure anticipato degli interessi) la forma di piano di ammortamento, l'andamento del processo può essere rappresentato nel modo seguente

t	*Rata*	*Interessi*	*Capitale*	*Debito*
0				*1.000.000*
1	*0*	*100.000*	*-100.000*	*1.100.000*
2	*0*	*110.000*	*-110.000*	*1.210.000*
3	*0*	*120.000*	*-120.000*	*1.330.000*
4	*0*	*130.000*	*-130.000*	*1.460.000*
5	*0*	*140.000*	*-140.000*	*1.600.000*
6	*1.750.000*	*150.000*	*1.600.000*	*0*

t	*Rata*	*Interessi*	*Capitale*	*Debito*
0				*1.000.000*
1	*93.750,00*	*93.750,00*	*0*	*1.000.000*
2	*95.890,41*	*95.890,41*	*0*	*1.000.000*
3	*97.744,36*	*97.744,36*	*0*	*1.000.000*
4	*99.173,55*	*99.173,55*	*0*	*1.000.000*
5	*100.000*	*100.000*	*0*	*1.000.000*
6	*1.100.000*	*100.000*	*1.000.000*	*0*

<u>Caso w = 1 – Regime finanziario della capitalizzazione lineare (capitalizzazione semplice)</u>

$$r_{\overline{6}|i}^1 = \underbrace{\underbrace{1}_{1} + \underbrace{6 \cdot 0,1}_{0,6}}_{1,6}$$

*Sempre nel precedente articolo è stato mostrato come il montante finale di **€ 1.600.000** sia la somma del capitale prestato e degli interessi di base (**€ 600.000**) (per l'assenza degli interessi anatocistici) (rif. Allegato A4)*

Tempi	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Interessi	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*600.000*
Int. period.	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*100.000*	*600.000*
Int. anato	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

dove si vede che

$$I_k^{fin} = I_k\, r^0_{\overline{n-k}|i} = I_k = 100.000 \qquad k = 1{:}n$$

essendo

$$r^1_{\overline{6}|i} = 1 + i\left(r^0_{\overline{5}|i} + r^0_{\overline{4}|i} + r^0_{\overline{3}|i} + r^0_{\overline{2}|i} + r^0_{\overline{1}|i} + r^0_{\overline{0}|i}\right) = 1 + 6 \cdot 0,1$$

*Tale operazione può essere schematizzata nel seguente cash-flow (essendo **D** il capitale prestato e **I** la somma degli interessi base)*

$$\underbrace{(-1.000.000;0)}_{(-D;0)}\ \underbrace{(\underbrace{1.600.000}_{1.000.000\cdot r^1_{\overline{6}|i}};6)}_{(D+I;6)}$$

*Qualora si volesse, mantenendo l'equità dell'operazione finanziaria nel regime finanziario della capitalizzazione semplice, anticipare il pagamento degli interessi ai singoli tempi della loro maturazione, è necessario, partendo dalla scomposizione dell'ammontare finale degli interessi (**€ 600.000)** nelle sue componenti costitutive, attualizzare (nel regime finanziario adottato della capitalizzazione semplice) tali componenti ai rispettivi tempi di maturazione*

$$I_k^{att} = I_k^{fin} v^1_{\overline{n-k}|i} = I_k\, r^0_{\overline{n-k}|i} v^1_{\overline{n-k}|i} = \frac{I_k}{1+(n-k)i} \qquad k = 1{:}n$$

e in particolare

$$I_1^{att} = I_1^{fin} v^1_{\overline{5}|i} = I_1\, r^0_{\overline{5}|i} v^1_{\overline{5}|i} = \frac{100.000}{1+5i} = 66.666,67$$

$$I_2^{att} = I_2^{fin} v^1_{\overline{4}|i} = I_2\, r^0_{\overline{4}|i} v^1_{\overline{4}|i} = \frac{100.000}{1+4i} = 71.428,57$$

$$I_3^{att} = I_3^{fin} v^1_{\overline{3}|i} = I_3\, r^0_{\overline{3}|i} v^1_{\overline{3}|i} = \frac{100.000}{1+3i} = 76.923,07$$

$$I_4^{att} = I_4^{fin} v^1_{\overline{2}|i} = I_4\, r^0_{\overline{2}|i} v^1_{\overline{2}|i} = \frac{100.000}{1+2i} = 83.333,33$$

$$I_5^{att} = I_5^{fin} v^1_{\overline{1}|i} = I_5\, r^0_{\overline{1}|i} v^1_{\overline{1}|i} = \frac{100.000}{1+i} = 90.909,09$$

$$I_6^{att} = I_6^{fin} v_{0|i}^{1} = I_5\, r_{0|i}^{0} v_{0|i}^{1} = \frac{\mathbf{100.000}}{\mathbf{1}} = \mathbf{100.000} = I_6$$

***Nota**: Il pagamento delle quote interessi ai tempi **1, 2, …, 6**, in sostituzione dell'equivalente pagamento finale degli interessi, per **€ 600.000,** al **tempo finale 6**, mantiene l'equità dell'operazione finanziaria e quindi conserva l'assenza del fenomeno anatocismo, come precedentemente evidenziato; il cash-flow risultante*

$$\underbrace{(-\mathbf{1.000.000};\mathbf{0})}_{(-D;0)}\ \underbrace{(\mathbf{66.666,67};\mathbf{1})}_{(I_1^{att};1)}\ \underbrace{(\mathbf{71.428,57};\mathbf{2})}_{(I_2^{att};2)} \dots \underbrace{(\mathbf{90.909,09};\mathbf{5})}_{(I_5^{att};5)}\ \underbrace{(\mathbf{1.100.000};\mathbf{6})}_{(D+I_6;6)}$$

nell'ipotesi che ogni importo disponibile possa essere reimpiegato alle stesse condizioni di mercato dell'operazione considerata, risulta finanziariamente equivalente al precedente cash-flow.

Volendo dare alle due precedenti tipologie di operazione finanziaria (con pagamento finale oppure anticipato degli interessi) la forma di piano di ammortamento, l'andamento del processo può essere rappresentato nel modo seguente

t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	0	100.000	-100.000	1.100.000
2	0	100.000	-100.000	1.200.000
3	0	100.000	-100.000	1.300.000
4	0	100.000	-100.000	1.400.000
5	0	100.000	-100.000	1.500.000
6	1.600.000	100.000	1.500.000	0

t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	66.666,67	66.666,67	0	1.000.000
2	71.428,57	71.428,57	0	1.000.000
3	76.923,07	76.923,07	0	1.000.000
4	83.333,33	83.333,33	0	1.000.000
5	90.909,09	90.909,09	0	1.000.000
6	1.100.000	100.000	1.000.000	0

*Nel presente lavoro, che costituisce il seguito del precedente, è stato esaminato il problema della misurazione del **livello di anatocismo** derivante dall'adozione di un determinato regime finanziario. Partendo dal regime finanziario della **capitalizzazione composta (CC)**, che ne è la causa prima, è stato evidenziato come la legge, che caratterizza tale regime finanziario, possa essere vista come una **funzione esponenziale** rappresentabile attraverso **espressioni polinomiali dinamiche**, che, attraverso il loro crescere in grado, generano effetti anatocistici a successivi livelli e come, operando algebricamente sui polinomi connessi alla funzione esponenziale, è possibile limitare il livello di anatocismo, fino ad escluderlo totalmente in corrispondenza all'adozione del regime finanziario della **capitalizzazione semplice (CS)**.*

*Nell'ambito dello svolgimento è stato ribadito come la presenza di **anatocismo dipenda dal regime finanziario** adottato e non già dalla struttura dell'operazione finanziaria esaminata, sia che essa preveda un pagamento finale degli interessi, che pagamenti periodici anticipati.*

*Il problema trattato ha riguardato operazioni finanziarie che prevedono un rimborso unico, alla scadenza, del capitale prestato (rimborso unico o mutuo puro). Nel prosieguo della trattazione lo studio verrà esteso ai tipici processi di ammortamento, nei quali sono previsti rimborsi progressivi del capitale prestato (ammortamento "**all'italiana**" e "**alla francese**"), mostrando come il principio dell'**attualizzazione delle quote interesse**, introdotto, qualche tempo* *addietro, per il modello di stesura di un piano di ammortamento stilato nel regime della capitalizzazione semplice, rientra nel più generale principio di attualizzazione caratteristico dei regimi finanziari di tipo polinomiale. Ovviamente, come fatto per le operazioni con rimborso unico, la trattazione deve iniziale dal caso di adozione del regime finanziario della* ***capitalizzazione composta****, per poi passare successivamente all'adozione dei regimi di* ***capitalizzazione polinomiale,*** *sino al regime delle* ***capitalizzazione semplice*** *(ossia lineare).*

Scopo del proseguimento del presente articolo sarà quello di applicare il modello di depurazione del fenomeno anatocistico, utilizzato per le operazioni con rimborso unico, a operazioni caratterizzate da rimborsi progressivi dell'importo prestato (ammortamento "all'italiana" e "alla francese" di un mutuo), sino alla definizione degli algoritmi tramite i quali costruire i piani di ammortamento nel regime finanziario della capitalizzazione semplice. Il procedimento sarà sostanzialmente quello, analogo al modello introdotto in precedenza, di costruire un piano di ammortamento con rimborsi progressivi, ma con unico pagamento finale degli interessi, distinguendo per livello gli interessi anatocistici contenuti nel processo di rimborso e quindi anticipare il pagamento delle quote interessi ai diversi tempi di pagamento dei rimborsi (ossia delle rate). Sostituendo al regime finanziario della capitalizzazione composta, i diversi regime di capitalizzazione polinomiale, sarà possibile limitare il fenomeno anatocistico, sino alla sua esclusione in corrispondenza all'adozione del regime finanziario della capitalizzazione semplice.

Tale procedimento, basato sull'attualizzazione delle quote interesse, mostra come i due processi di ammortamento (in capitalizzazione composta e semplice) non differiscono riguardo alla regola di calcolo delle quote interessi (prodotto del debito residuo per il tasso periodale di riferimento), ma sul tempo di pagamento di tali quote interessi, al tempo di calcolo (nel caso di adozione del regime della capitalizzazione composta) e al tempo finale (nel caso del regime della capitalizzazione semplice): tale considerazione fa comprendere perché, nel caso di adozione del regime della capitalizzazione semplice con pagamento contestuale delle quote interessi, è necessario provvedere alla loro attualizzazione. N.B.: in effetti, anche nel caso di adozione del regime finanziario della capitalizzazione composta, tale attualizzazione deve essere effettuata, ma, poiché opera sul montante delle quote interessi, essa risulta elisa.

I risultati, di cui si darà in seguito giustificazione, con riferimento all'esempio precedentemente utilizzato: capitale prestato di ***D = € 1.000.000****, tasso periodale effettivo di interesse* ***10%*** *e durata dell'operazione: 6 periodi, sono di seguito anticipati, rispetto alla futura trattazione*

Piano "all'italiana" in CC				
t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	266.667	100.000	166.667	833.333
2	250.000	83.333	166.667	666.667
3	233.333	66.667	166.667	500.000
4	216.667	50.000	166.667	333.333
5	200.000	33.333	166.667	166.667
6	183.333	16.667	166.667	0

Piano "all'italiana" in CS				
t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	233.333	66.667	166.667	833.333
2	226.190	59.524	166.667	666.667
3	217.949	51.282	166.667	500.000
4	208.333	41.667	166.667	333.333
5	196.970	30.303	166.667	166.667
6	183.333	16.667	166.667	0

Piano "alla francese" in CC				
t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	229.607	100.000	129.607	870.393
2	229.607	87.039	142.568	727.825
3	229.607	72.782	156.825	571.000
4	229.607	57.100	172.507	398.492
5	229.607	39.849	189.758	208.734
6	229.607	20.873	208.734	0

Piano "alla francese" in CS				
t	Rata	Interessi	Capitale	Debito
0				1.000.000
1	213.333	66.667	146.667	853.333
2	213.333	60.952	152.381	700.952
3	213.333	53.919	159.414	541.538
4	213.333	45.128	168.205	373.333
5	213.333	33.939	179.394	193.939
6	213.333	19.394	193.939	0

<u>Allegato A1</u>

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito						1.000.000		Totali
Interessi							100.000	100.000
Totali		0	0	0	0	0	100.000	100.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito					1.000.000			Totali
Interessi						100.000		100.000
Livello 2							10.000	10.000
Totali		0	0	0	0	100.000	10.000	110.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito				1.000.000				Totali
Interessi					100.000			100.000
Livello 2						10.000	10.000	20.000
Livello 3							1.000	1.000
Totali		0	0	0	100.000	10.000	11.000	121.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito			1.000.000					Totali
Interessi				100.000				100.000
Livello 2					10.000	10.000	10.000	30.000
Livello 3						1.000	2.000	3.000
Livello 4							100	100
Totali		0	0	100.000	10.000	11.000	12.100	133.100

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito		1.000.000						Totali
Interessi			100.000					100.000
Livello 2				10.000	10.000	10.000	10.000	40.000
Livello 3					1.000	2.000	3.000	6.000
Livello 4						100	300	400
Livello 5							10	10
Totali		0	100.000	10.000	11.000	12.100	13.310	146.410

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito	1.000.000							Totali
Interessi		100.000						100.000
Livello 2			10.000	10.000	10.000	10.000	10.000	50.000
Livello 3				1.000	2.000	3.000	4.000	10.000
Livello 4					100	300	600	1.000
Livello 5						10	40	50
Livello 6							1	1
Totali		100.000	10.000	11.000	12.100	13.310	14.641	161.051

Allegato A2

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito						1.000.000		Totali
Interessi							100.000	100.000
Totali		0	0	0	0	0	100.000	100.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito					1.000.000			Totali
Interessi						100.000		100.000
Livello 2							10.000	10.000
Totali		0	0	0	0	100.000	10.000	110.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito				1.000.000				Totali
Interessi					100.000			100.000
Livello 2						10.000	10.000	20.000
Livello 3							1.000	1.000
Totali		0	0	0	100.000	10.000	11.000	121.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito			1.000.000					Totali
Interessi				100.000				100.000
Livello 2					10.000	10.000	10.000	30.000
Livello 3						1.000	2.000	3.000
Totali		0	0	100.000	10.000	11.000	12.000	133.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito		1.000.000						Totali
Interessi			100.000					100.000
Livello 2				10.000	10.000	10.000	10.000	40.000
Livello 3					1.000	2.000	3.000	6.000
Totali		0	100.000	10.000	11.000	12.000	13.000	146.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito	1.000.000							Totali
Interessi		100.000						100.000

Livello 2			*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*50.000*
Livello 3				*1.000*	*2.000*	*3.000*	*4.000*	*10.000*
Totali		*100.000*	*10.000*	*11.000*	*12.000*	*13.000*	*14.000*	*160.000*

Allegato A3

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito						*1.000.000*		*Totali*
Interessi							*100.000*	*100.000*
Totali		*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100.000*	*100.000*

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito					*1.000.000*			*Totali*
Interessi						*100.000*		*100.000*
Livello 2							*10.000*	*10.000*
Totali		*0*	*0*	*0*	*0*	*100.000*	*10.000*	*110.000*

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito				*1.000.000*				*Totali*
Interessi					*100.000*			*100.000*
Livello 2						*10.000*	*10.000*	*20.000*
Totali		*0*	*0*	*0*	*100.000*	*10.000*	*10.000*	*120.000*

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito			*1.000.000*					*Totali*
Interessi				*100.000*				*100.000*
Livello 2					*10.000*	*10.000*	*10.000*	*30.000*
Totali		*0*	*0*	*100.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*130.000*

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito		*1.000.000*						*Totali*
Interessi			*100.000*					*100.000*
Livello 2				*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*40.000*
Totali		*0*	*100.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*140.000*

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito	*1.000.000*							*Totali*
Interessi		*100.000*						*100.000*
Livello 2			*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*50.000*
Totali		*100.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*10.000*	*150.000*

Allegato A4

Tempi	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*Tempi*
Debito						*1.000.000*		*Totali*
Interessi							*100.000*	*100.000*
Totali		*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*100.000*	*100.000*

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito					1.000.000			Totali
Interessi						100.000		100.000
Totali		0	0	0	0	100.000	0	100.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito				1.000.000				Totali
Interessi					100.000			100.000
Totali		0	0	0	100.000	0	0	100.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito			1.000.000					Totali
Interessi				100.000				100.000
Totali		0	0	100.000	0	0	0	100.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito		1.000.000						Totali
Interessi			100.000					100.000
Totali		0	100.000	0	0	0	0	100.000

Tempi	0	1	2	3	4	5	6	Tempi
Debito	1.000.000							Totali
Interessi		100.000						100.000
Totali		100.000	0	0	0	0	0	100.000